

## Zur Berechnung von Gitterströmungen bei einigermaßen großem Schaufelabstand

Herrn R. v. Mises zum 70. Geburtstag

Von A. Betz in Göttingen

*Zur Berechnung von Gitterströmungen verwendet man vielfach das durch Diagramme gegebene Feld einer Wirbelreihe, bei der ein Wirbel fehlt. Dieses Feld wird durch eine Reihenentwicklung dargestellt, von der man bei großem Schaufelabstand nur das erste Glied braucht. Weiterhin wird gezeigt, wie man aus diesem Feld einer Wirbelreihe, das Feld einer entsprechenden Reihe von Tragflügeln mit gegebener Zirkulationsverteilung ermitteln kann und wie es sich auf die Gestalt der Flügel auswirkt.*

*For the calculation of cascade flows the field, given by diagrams, of a series of whirls, whereby a whirl is lacking, is often used. This field is represented by a development of series, of which, at a great distance of the blades, you need only the first term. It is further shown, how you can ascertain out of this field of a series of whirls the field of a corresponding series of bearing wings with a given distribution of circulation, and what influence this has on the form of the wings.*

*A la supputation de courants treillisés on emploie souvent le champ, donné par des diagrammes, d'une série de tourbillonnements, où un tourbillonnement manque. Ce champ est représenté par un développement manque dont, à une grande distance des aubes, on n'a besoin que du premier terme. De plus, il est montré, comment de ce champ d'une série de tourbillonnements on peut trouver le champ d'une série correspondante d'ailes portantes avec une distribution donnée de circulation, et quelle influence il a sur la forme des ailes.*

Для вычисления решеточных течений нередко употребляется заданное диаграммами поле вихревой последовательности с одним отсутствующим вихрем. После это представляется разложением в ряд, от которого требуется, при большом расстоянии лопаток, лишь первый член. Далее показано, как из этого поля вихревой последовательности может быть получено поле соответствующего ряда крыльев с данным распределением циркуляции и как оно проявляется на форме крыльев.

Bei weit stehenden Gitterschaufeln kann man für die Berechnung der Strömung von einer alleinstehenden Schaufel ausgehen und den Einfluß der Nachbarflügel als Korrektur einführen. Dieser Einfluß rührt hauptsächlich von der Zirkulation um diese Flügel her. Als Grundlage für die Berechnung dieser Störung durch die Nachbarflügel dient daher das Strömungsfeld einer Wirbelreihe, in der ein Wirbel fehlt (Bild 1). Dieses Strömungsfeld ist berechnet und in Form von Schaubildern dargestellt<sup>1)</sup>. Für manche Zwecke, insbesondere, wenn man die Verteilung der Zirkulation längs der Schaufeln berücksichtigen und deshalb die Störungsfunktion über die Schaufelerstreckung integrieren muß, wäre es bequemer, einfache formelmäßige Darstellungen dieses Störungsfeldes verwenden zu können.

So lange sich nun das Gebiet, in dem die Störung darzustellen ist, nicht erheblich über eine halbe Gitterteilung von der Stelle des fehlenden Wirbels entfernt, kann man die Störungsfunktionen durch rasch konvergierende Reihen darstellen, von denen meist das erste Glied allein ausreicht.

Legen wir in einer komplexen  $z$ -Ebene ( $z = x + iy = re^{i\varphi}$ , Bild 1) eine vollständige Wirbelreihe mit der Teilung  $t$  so, daß die Reihe in die imaginäre Achse und ein Wirbel in den Nullpunkt fällt, so geht durch die konforme Abbildung  $\zeta = e^{2\pi z/t}$  ein Streifen der  $z$ -Ebene von der Breite der Teilung  $t$  in die volle  $\zeta$ -Ebene über<sup>2)</sup>. Ist die Zirkulation um die einzelnen

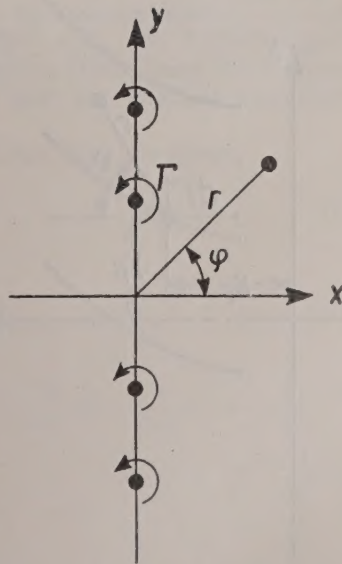


Bild 1

<sup>1)</sup> A. Betz, Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen. Ing.-Arch. 2 (1931), S. 359. Die gleiche Funktion spielt auch in der Theorie des Paramagnetismus eine Rolle, sie wird da als Langevinsche Funktion bezeichnet.

<sup>2)</sup> A. Betz, Konforme Abbildung, S. 166. Springer-Verlag: Berlin/Göttingen/Heidelberg 1948.

Wirbel der Reihe  $\Gamma$ , so erhalten wir im Punkte  $\zeta = +1$  der  $\zeta$ -Ebene einen Wirbel mit der Zirkulation  $\Gamma$  und im Nullpunkt, der dem Punkte  $z = -\infty$  entspricht, einen Wirbel mit der Zirkulation  $-\Gamma/2$ . Darnach wird das komplexe Potential des Strömungsfeldes

$$\Phi_1 + i\Psi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - 1}{\sqrt{\zeta}} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (e^{\pi z/t} - e^{-\pi z/t}) \quad \dots \quad (1).$$

Das komplexe Potential eines einzelnen Wirbels mit der Zirkulation  $\Gamma$  im Nullpunkte der  $z$ -Ebene ist

$$\Phi_2 + i\Psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln 2\pi z/t \quad \dots \quad (2).$$

Der an sich willkürliche Faktor  $2\pi/t$  von  $z$  ist dabei so gewählt, daß für  $z \rightarrow 0$  die Differenz der beiden komplexen Potentiale ebenfalls  $\rightarrow 0$  geht. Ziehen wir (2) von (1) ab, so erhalten wir als Feld der Wirbelreihe, bei der der Wirbel im Nullpunkt fehlt,

$$\Phi' + i\Psi' = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{e^{\pi z/t} - e^{-\pi z/t}}{2\pi z/t} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \pi z/t}{\pi z/t} \quad \dots \quad (3).$$

Diesen Ausdruck können wir in eine Potenzreihe nach  $z$  entwickeln. Es ist nämlich, so lange  $\mu > 2\pi$

$$\ln \frac{\sin \mu/2}{\mu/2} = B_2 \frac{\mu^2}{2 \cdot 2!} + B_4 \frac{\mu^4}{4 \cdot 4!} + B_6 \frac{\mu^6}{6 \cdot 6!} + \dots \quad (4)$$

wobei  $B_n$  die sogenannten Bernoullischen Zahlen bedeuten:

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30} \quad \dots \quad (5).$$

Damit wird

$$\Psi' - i\Phi' = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{z\pi}{t} \right)^2 - \frac{1}{180} \left( \frac{z\pi}{t} \right)^4 + \frac{1}{2835} \left( \frac{z\pi}{t} \right)^6 + \dots \right] \quad \dots \quad (6).$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten  $u'$  parallel der Richtung die Wirbelreihe und  $v'$  senkrecht dazu ergibt sich

$$u' + iv' = \frac{\Gamma}{t} \left[ \frac{1}{6} \frac{z\pi}{t} - \frac{1}{90} \left( \frac{z\pi}{t} \right)^3 + \frac{1}{945} \left( \frac{z\pi}{t} \right)^5 - \dots \right] \quad \dots \quad (7).$$

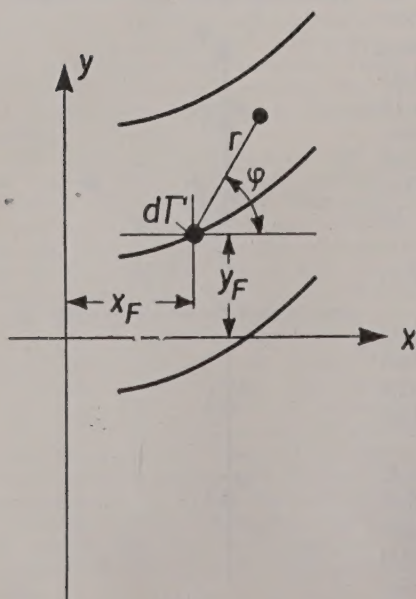


Bild 2

Die Trennung in Real- und Imaginärteil macht keine Schwierigkeiten, wenn wir die Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  benutzen, da ja

$$\left( \frac{z\pi}{t} \right)^n = \left( \frac{r\pi}{t} \right)^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \dots \quad (8)$$

ist.

Ist die Anströmung zum Gitter in großer Entfernung durch die Geschwindigkeitskomponenten  $u_1$  und  $v$  parallel und senkrecht zur Gitterrichtung gegeben, so hat die Abströmung in großer Entfernung hinter dem Gitter die Komponenten  $u_2 = u_1 + \Gamma/t$  und  $v$ . Die Anströmung auf einen einzelnen Flügel hat nach Wegfall des Einflusses der Nachbarflügel die Komponenten

$$\hat{u} = (u_1 + u_2)/2 \quad \dots \quad (9)$$

und  $v$ .

Geht man von der Strömung um einen Einzelflügel von der gleichen Zirkulation  $\Gamma$  bei dieser Anströmung aus, die man mit bekannten Verfahren berechnen kann, so ist hieraus in erster Näherung sowohl die Form der Flügel  $y_F(x_F)$  als auch die Verteilung der Zirkulation  $\gamma(x_F)$  gegeben<sup>3)</sup>. Aus der Form können wir zu jedem Aufpunkt mit den Koordinaten  $z = x + iy$  Entfernung  $r$  und Richtungswinkel  $\varphi$  von dem laufenden Punkt  $z_F = x_F + iy_F$  der Schaufel

<sup>3)</sup>  $\langle x \rangle$  soll Funktion von  $x$  bedeuten.

also  $z - z_F = re^{i\varphi}$  angeben (Bild 2). Die Elemente  $dx_F$  der einzelnen Schaufeln haben die Zirkulation  $\gamma \langle x_F \rangle dx_F$ . Demnach ergibt sich der Einfluß dieser Elementarwirbel der Nachbarflügel auf das Potential

$$d\Psi - i d\Phi = - \frac{\Psi' - i\Phi'}{\Gamma} \langle z - z_F \rangle \gamma \langle x_F \rangle dx_F \quad \dots \quad (10).$$

Dabei ist  $\Phi'$  und  $\Psi'$  nach (6) zunächst als Funktion von  $r$  und  $\varphi$  gegeben, aber da  $r$  und  $\varphi$  selbst für einen gegebenen Aufpunkt  $z$  sich durch  $x_F$  ausdrücken lassen, so ist auch  $\Phi' - i\Psi'$  als Funktion von  $x_F$  darzustellen. Die Wirkung der ganzen Nachbarflügel wird darnach

$$\bar{\Psi}' - i\bar{\Phi}' = \int \frac{\Psi' - i\Phi'}{\Gamma} \gamma dx_F \quad \dots \quad (11)$$

und entsprechend

$$\bar{u}' + i\bar{v}' = \int \frac{u' + iv'}{\Gamma} \gamma dx_F \quad \dots \quad (12).$$

Die Integrale erstrecken sich dabei über das ganze Flügelprofil von der Eintrittskante bis zur Austrittskante. An sich ist die Darstellung von  $\Psi'$  usw. als Funktion von  $x_F$  verhältnismäßig umständlich, aber praktisch kann man sich dabei meist mit ziemlich grober Annäherung dieser Darstellung begnügen, da ja durch die Integration Abweichungen von der genauen Verteilung des Integranden weitgehend ausgeglichen werden. Eine weitere Vereinfachung tritt ein, wenn man sich in den Reihendarstellungen (6) und (7) jeweils auf das erste Glied beschränken kann.

Dann kann man nämlich die Integrale auf statische und Trägheitsmomente der Zirkulationsverteilung  $\gamma$  zurückführen. Sind  $x_s, y_s$  die Koordinaten des Schwerpunktes der Zirkulationsverteilung, ferner  $J_x = \int \gamma (y_F - y_s)^2 dx_F$  und  $J_y = \int \gamma (x_F - x_s)^2 dx_F$  die Trägheitsmomente um die durch den Schwerpunkt gelegten Achsen in  $x$ - und  $y$ -Richtung und  $J_{xy} = \int \gamma (x_F - x_s)(y_F - y_s) dx_F$  das entsprechende Zentrifugalmoment, so wird

$$\int \gamma (z - z_F) dx_F = \Gamma(z - z_s) \quad \dots \quad (13).$$

$$\int \gamma (z - z_F)^2 dx_F = J_y - J_x + 2iJ_{xy} + \Gamma[(x - x_s)^2 - (y - y_s)^2 + 2i(x - x_s)(y - y_s)] \quad \dots \quad (14).$$

An sich kann man auch die entsprechenden Integrale der höheren Glieder von (6) und (7) durch höhere Trägheitsmomente ausdrücken. Die entstehenden Ausdrücke verursachen aber verhältnismäßig viel Rechenarbeit und die Reihen konvergieren auch nur in einem beschränkten Bereich, so daß der Gültigkeitsbereich nur etwa doppelt so groß ist wie bei Beschränkung auf das erste Glied. Deshalb dürfte sich eine solche Entwicklung im allgemeinen nicht lohnen. Wenn die Beschränkung auf das erste Glied nicht ausreicht, wird meist die Auswertung der Integrale unter Verwendung der graphischen Darstellung der Strömungsfunktion einfacher sein. Immerhin kann auch diese Entwicklung manchmal nützlich sein. Der Vollständigkeit halber sei sie deshalb kurz angedeutet, wobei wir uns auf die komplexe Darstellung beschränken, ohne die verhältnismäßig umständliche Trennung von Real- und Imaginärteil ausführlich durchzuführen<sup>4)</sup>.

Wir führen die dimensionslosen allgemeineren Momente der Wirbelbelegung

$$M_n = \frac{1}{\Gamma} \left( \frac{\pi}{t} \right)^n \int (z_F - z_s)^n \gamma dx_F \quad \dots \quad (15)$$

ein, wobei  $M_1 = 0$  ist. Wenn wir zur Abkürzung

$$\pi(z - z_s)/t = Z^5 \quad \dots \quad (16)$$

setzen, erhalten wir damit

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{\Gamma} (\bar{u}' + i\bar{v}') &= \left[ \frac{1}{6} Z - \frac{1}{90} Z^3 + \frac{1}{945} Z^5 - \dots \right] - M_2 \left[ \frac{1}{30} Z - \frac{10}{945} Z^3 + \frac{1}{450} Z^5 - \dots \right] \\ &+ M_3 \left[ \frac{1}{90} - \frac{10}{945} Z^2 + \frac{1}{270} Z^4 - \dots \right] \\ &- M_4 \left[ \frac{1}{189} Z - \frac{1}{270} Z^3 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (17).$$

$$\Psi' - i\Phi' = \int_0^z (\bar{u}' + i\bar{v}') dz = \frac{t}{\pi} \int_0^Z (\bar{u}' + i\bar{v}') dZ \quad \dots \quad (18).$$

<sup>4)</sup> Für die Berechnung danke ich den Herren Dipl.-Phys. E. Becker und cand rer. nat. K. Kirde.

Die Parallelströmung, in der sich der Einzelflügel befindet, hat die Geschwindigkeitskomponenten  $\hat{u}$  (9) und  $v$  und daher in einem Punkte  $x_0, y_0$  Potential und Stromfunktion

$$\Phi_0 = v x_0 + \hat{u} y_0, \quad \Psi_0 = v y_0 - \hat{u} x_0 \dots \dots \dots (19).$$

Durch Überlagerung der Störung durch die Nachbarflügel gehen die Werte in diesem Punkte  $x_0, y_0$  über in  $\Phi_0 + \bar{\Phi}', \Psi_0 + \bar{\Psi}', \hat{u} + \bar{u}', v + \bar{v}'$ . Punkte gleichen Potentials und gleicher Stromfunktion verschieben sich hierbei um die Strecken

$$x' = (x - x_0) = \frac{v \bar{\Phi} - \hat{u} \bar{\Psi}'}{u^2 + v^2}, \quad y' = (y - y_0) = \frac{\hat{u} \bar{\Phi}' + v \bar{\Psi}'}{u^2 + v^2} \dots \dots \dots (20).$$

Diese Änderung der einzelnen Punkte stellt eine konforme Abbildung der Parallelströmung in die von den Nachbarflügeln gestörte Strömung dar. Wenden wir diese konforme Abbildung auf die Strömung um den Einzelflügel an, indem wir auch hier alle Punkte um die kleinen Strecken nach (20) verschieben, so erhalten wir die gesuchte Strömung durch das Gitter. Waren in einem Punkte  $x_0 y_0$  der Umgebung des Einzelflügels Potential und Stromfunktion  $\Phi$  und  $\psi$ , so ergeben sich unter dem Einfluß der Nachbarflügel die gleichen Werte in dem entsprechenden Punkte  $x = x_0 + x', y = y_0 + y'$ . Voraussetzung ist hierbei, daß die Verschiebungen  $x'$  und  $y'$  nicht allzu groß sind, was meistens der Fall ist. Durch die Verschiebungen  $x'$  und  $y'$  nimmt auch der Flügel eine etwas andere Form an. Deshalb müßte man genau genommen, die Rechnung mit der geänderten Form  $y_F \langle x_F \rangle$  und Zirkulationsverteilung  $\gamma \langle x_F \rangle$  wiederholen. Im allgemeinen sind aber die Formänderungen nur klein und die Wiederholung bringt nur so geringe Unterschiede, daß sich diese Iteration erübrigt.

## Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben

Herrn R. von Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

Von L. Collatz in Hamburg

Funktionalanalytische Methoden beginnen sich in steigendem Maße in der praktischen Analysis zu bewähren. Freilich bedürfen sie oft einer Umgestaltung, und es bleibt häufig so viel Freiheit in der Art der Anwendung, daß die für numerische Zwecke geeignete Auswahl noch einiger Forschung und Erfahrung bedarf. Hier soll an dem Beispiel der Iterationsverfahren bei Randwertaufgaben gezeigt werden, wie bei Wahl verschiedener Normbegriffe die funktionalanalytischen Methoden zu unterschiedlichen Abschätzungen führen, so daß die Frage nach zweckmäßiger Auswahl unter den verschiedenen Möglichkeiten auch hier sinnvoll erscheint.

### 1. Die allgemeine Abschätzung

Wir legen einen metrischen Raum  $\mathfrak{R}$  zugrunde; die Punkte  $f, f_1, f_2, \dots$  von  $\mathfrak{R}$  dürfen irgendwelche Elemente, Vektoren, Funktionen usw. sein. Für je zwei Elemente  $f_1, f_2$  von  $\mathfrak{R}$  soll ein Abstand  $\|f_1 - f_2\|$  definiert sein mit den Definitheits-Eigenschaften

$$\|f_1 - f_2\| \geq 0, \quad \|f_1 - f_2\| = 0 \text{ genau dann, wenn } f_1 = f_2,$$

und der Dreiecksungleichung für beliebige  $f_1, f_2, f_3$ :

$$\|f_1 - f_2\| \leq \|f_1 - f_3\| + \|f_3 - f_2\|.$$

In den folgenden Anwendungen handelt es sich stets um Räume, in denen eine Addition mit den üblichen Gruppeneigenschaften definiert ist und bezüglich dieser Addition ein Nullelement  $\Theta$  existiert; dann bezeichnen wir  $\|f - \Theta\| = \|f\|$  als Norm von  $f$  und definieren an Stelle des Abstandes einfacher die Norm.

Manchmal ist es zweckmäßig, den Raum  $\mathfrak{R}$  noch als vollständig und damit als Banachschen Raum vorauszusetzen; das soll jedoch nicht allgemein verlangt werden. Die Vollständigkeit besagt: Gibt es in  $\mathfrak{R}$  eine Punktfolge  $f_n$  mit  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0$ , so existiert zu ihr ein Grenzpunkt  $f$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$ .

Ferner betrachten wir Operatoren  $T$  mit Lipschitzkonstanten; der Operator  $T$  sei für die Elemente  $f$  eines Bereiches  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{R}$  definiert und es gebe eine Konstante  $K$  (Lipschitzkonstante) mit

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\| \quad \text{für } f_1, f_2 \in \mathfrak{B} \dots \dots \dots (1).$$

Die Operatorgleichung  $f = Tf$  besitze nun eine Lösung  $u$  in  $\mathfrak{B}$ ; dann hat für das Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = Tu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2),$$

im Falle  $K < 1$  Weissinger<sup>1)</sup> eine Fehlerabschätzung angegeben

$$\|u_n - u\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_{n-1} - u_n\| \quad (3)$$

ist der Raum sogar ein Banachscher, so läßt sich die Existenz genau einer Lösung im Falle  $K < 1$  beweisen<sup>2)</sup>.

Diese Formel (3) umfaßt sehr viele in der praktischen Analysis bereits bekannte und auch neue Fälle; durch Wahl verschiedener Normbegriffe ordnet sich eine Anzahl der bisher bekannten Fehlerabschätzungen bei linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen hierunter<sup>2)</sup>; ebenso hat man bei Randwertaufgaben verschiedene Möglichkeiten für die Wahl einer Norm, wie im folgenden beschrieben wird.

Folgende Bemerkung über den Bereich ist manchmal ganz nützlich (vgl. das Beispiel in Nr. 6).

Aus

$$\|u_2 - u_1\| = \|Tu_1 - Tu_0\| \leq K \|u_1 - u_0\|$$

und allgemein

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq K^p \|u_{n+1-p} - u_{n-p}\|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq p \leq n)$$

folgt im Falle  $K < 1$  für  $0 < n < m$

$$\|u_m - u_n\| = \left\| \sum_{v=n}^{m-1} (u_{v+1} - u_v) \right\| \leq \left( \sum_{v=1}^{m-n} K^v \right) \|u_n - u_{n-1}\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Wählt man sich ein  $u_0 \in \mathfrak{B}$  mit  $u_1 \in \mathfrak{B}$  und kann man feststellen, daß alle Elemente  $\varphi$  mit

$$\|\varphi - u_1\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_1 - u_0\| \quad (4)$$

zu  $\mathfrak{B}$  gehören, so ist man sicher, daß sämtliche Iterierte  $u_n$  in  $\mathfrak{B}$  bleiben.

## 2. Der Operator $T$ bei linearen Randwertaufgaben

Es sei eine lineare Randwertaufgabe mit der Differentialgleichung

$$L[u] = p(x_j)u + q(x_j) \text{ in } B \quad (5)$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu[u] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu, \quad (\mu = 1, \dots, k) \quad (6)$$

vorgelegt.  $L[u]$  und  $U_\mu[u]$  seien lineare homogene Differential-Ausdrücke für eine Funktion  $u(x_1, \dots, x_m)$ ,  $p, q, \gamma_\mu$  gegebene Ortsfunktionen,  $\Gamma_\mu$  gegebene Randflächen des Bereiches  $B$ .

Das Iterationsverfahren lautet dann

$$\left. \begin{aligned} L[u_{n+1}] &= p u_n + q \text{ in } B \\ U_\mu[u_{n+1}] &= \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7).$$

Wir setzen voraus, daß die Aufgabe

$$L[\varphi] = r \text{ in } B, \quad U_\mu[\varphi] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (8)$$

bei beliebigen stetigen  $r, \gamma_\mu$  stets eine eindeutige Lösung  $\varphi$  besitzt; dann ist also das Iterationsverfahren unbeschränkt durchführbar. Öfter werden wir die Existenz einer Greenschen Funktion  $G(x_j, \xi_j)$  fordern, welche die Aufgabe (8) für  $\gamma_\mu = 0$  in der Form

$$\varphi(x_j) = \int_B G(x_j, \xi_j) r(\xi_j) d\xi_j \quad (9)$$

löst.

Mit Hilfe einer die inhomogenen Randbedingungen erfüllenden Funktion  $\tilde{u}$  (die auch so oft stetig differenzierbar ist, wie es zur Bildung von  $L[\tilde{u}]$  gebraucht wird) kann man zu einer Aufgabe übergehen, bei der die Randbedingungen homogen sind (dieser Übergang dient nur zur Aufstellung der Fehlerabschätzung; er braucht nicht für die numerische Rechnung vollzogen zu werden); es sei  $u = \tilde{u} + v$ ,  $u_n = \tilde{u} + v_n$ ; dann ist eine Transformation  $T$  durch

$$v_1 = Tv_0 \quad (10)$$

<sup>1)</sup> J. Weissinger: Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 245.

<sup>2)</sup> J. Weissinger: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachrichten 1952. — D. Morgenstern: Beiträge zur nichtlinearen Funktionalanalysis. Diss. Technische Universität Berlin 1952.

definiert, da  $u_0$  und damit auch  $v_0$  beliebig sind; es gilt dann

$$v_{n+1} = T v_n \quad \text{und} \quad v = T v \dots \dots \dots (11),$$

ferner bleiben die Fehler beim Übergang von  $u$  zu  $v$  ungeändert:

$$u_n - u = v_n - v \dots \dots \dots (12).$$

Bei gegebenem  $f$  findet man also  $g = Tf$  durch Lösung der Randwertaufgabe

$$L[g] = pf + Q \text{ in } B, \quad U_\mu[g] = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu \dots \dots \dots (13)$$

mit

$$Q = q + p\tilde{u} - L[\tilde{u}] \dots \dots \dots (14).$$

### 3. Verschiedene Normbegriffe

Um die allgemeine Fehlerabschätzung anwenden zu können, brauchen wir noch die Wahl einer geeigneten Norm und die Lipschitzkonstante. Die in der Funktionalanalysis oft verwendete Norm für eine Funktion  $f \dots \dots \dots$

$$\|f\| = \sqrt{\int_B f^2 d\tau} \dots \dots \dots (15),$$

wobei über den Bereich  $B$  zu integrieren ist, ist für numerische Zwecke wenig geeignet; denn es kann dann bei Vorgabe eines beliebig kleinen  $\varepsilon > 0$  und eines beliebig großen  $M > 0$  noch eintreten, daß die Norm  $\|f\| < \varepsilon$  ist und trotzdem  $|f| > M$  an einer Stelle in  $B$  ist.

Eine einfache, wenn auch manchmal etwas grobe Fehlerabschätzung erhält man durch folgenden Normbegriff, der sich aufstellen läßt, wenn die Eigenwertaufgabe

$$L[z] = \lambda z \text{ in } B; \quad U_\mu[z] = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu \dots \dots \dots (16)$$

eine im Bereich  $B - \sum_\mu \Gamma_\mu$  positive Eigenfunktion  $Z$  besitzt, etwa mit dem Eigenwert  $\lambda_z$ , und wenn eine in  $B$  nichtnegative Greensche Funktion  $G(x_j, \xi_j)$  existiert; dann kann man die Norm verwenden

$$\|f\| = \text{Obere Grenze von } \left| \frac{f}{Z} \right| \text{ in } B \dots \dots \dots (17).$$

Es gilt dann also

$$|f| \leq \|f\| \cdot Z \dots \dots \dots (18);$$

dieser Begriff erfüllt die an eine Norm gestellten Bedingungen, wobei wir zulassen, daß die Norm auch unendlich sein darf. Jetzt ist nach (9):

$$Tf_1 - Tf_2 = \int_B G(x_j, \xi_j) p(\xi_j) \cdot \{f_1(\xi_j) - f_2(\xi_j)\} d\xi_j \dots \dots \dots (19)$$

$$|Tf_1 - Tf_2| \leq \|f_1 - f_2\| \cdot |p|_{\max \text{ in } B} \int_B G(x_j, \xi_j) Z(\xi_j) d\xi_j \dots \dots \dots (20).$$

Nach (16) ist das letzte Integral gerade  $\frac{Z(x_j)}{\lambda_z}$ ; mithin

$$\left| \frac{Tf_1 - Tf_2}{Z} \right| \leq \|f_1 - f_2\| \cdot \frac{|p|_{\max \text{ in } B}}{\lambda_z}$$

Diese Ungleichung gilt auch für die obere Grenze des linksstehenden Ausdruckes; damit folgt

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\| \dots \dots \dots (21)$$

mit dem Wert der Lipschitzkonstanten

$$K = \frac{|p|_{\max \text{ in } B}}{\lambda_z} \dots \dots \dots (22).$$

Die Bedingung  $K < 1$  läßt sich in diesem Falle bequem prüfen und damit bei  $K < 1$  eine sehr leicht durchführbare Fehlerabschätzung gewinnen; angenehm ist bei dieser Abschätzung, daß der Fehler nicht im ganzen Grundgebiet  $B$  durch eine Konstante, sondern durch die Form der Eigenfunktion  $Z$  abgeschätzt wird.

Der letztgenannte Vorteil geht bei dem Normbegriff

$$\|f\| = \text{Max}_{\text{in } B} |f| \dots \dots \dots (23)$$

verloren; bei (23) ergibt sich in  $B$  eine konstante Fehlerschranke. Wieder sei in  $B$  eine Greensche Funktion  $G(x_j, \xi_j)$  vorhanden, von der jetzt aber nicht vorausgesetzt werden muß, daß sie nichtnegativ ist. Aus (19) folgt hier

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\|$$

mit

$$K = \text{Max}_{\text{in } B} \int_B |G(x_j, \xi_j) p(\xi_j)| d\xi_j \dots \dots \dots (24).$$

Man könnte daran denken, für bestimmte Aufgabenklassen, bei welchen  $G$  nichtnegativ ist,  $\int_B G(x_j, \xi_j) d\xi_j$  auszurechnen und  $|p|_{\max}$  aus dem Integral in (24) herauszuziehen; man erhält dann eine handliche Formel für  $K$ ; aber eine Vergrößerung bei  $K$  kann, wenn  $K$  der Zahl 1 zu nahe kommt oder 1 gar überschreitet, die Abschätzung (3) unbrauchbar machen.

Es lassen sich noch verschiedene andere Normbegriffe aufstellen, z. B.:

$$\|f\| = \text{Max}_{\text{in } B} \sqrt{f^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2}$$

oder

$$\|f\| = \text{Obere Grenze von } \left| \frac{f}{W} \right| \dots \dots \dots (25),$$

wobei  $W$  eine fest gewählte in  $B$  positive, evtl. auch nichtnegative Funktion bedeutet. Bei dem letztgenannten Normbegriff wird nach (19)

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \int_B |G(x_j, \xi_j) p(\xi_j)| W(\xi_j) d\xi_j \dots \dots \dots (26),$$

also gilt Abschätzung (1) mit

$$K = \text{Obere Grenze von}_{\text{in } B} \frac{\int_B |G(x_j, \xi_j) p(\xi_j)| W(\xi_j) d\xi_j}{W(x_j)} \dots \dots \dots (27).$$

In Nr. 4 wird hierzu ein Beispiel gegeben.

#### 4. Beispiel

Vorgelegt sei

$$L[u] = -u'' = (1 + x^2)u + 1; u(\pm 1) = 0 \dots \dots \dots (28);$$

$u$  läßt sich deuten als Biegemoment bei einem auf Knickbiegung beanspruchten Stab. Striche bedeuten Ableitungen nach  $x$ . Einige Iterationsschritte ergeben<sup>3)</sup>:

$$\begin{aligned} 32 u_0 &= 30 - 30 x^2 \\ 32 u_1 &= 30 - 31 x^2 + x^6 \\ 32 u_2 &= \frac{75379}{2520} - 31 x^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{31}{30} x^6 - \frac{1}{56} x^8 - \frac{1}{90} x^{10}. \end{aligned}$$

Der Normbegriff (17) ist leicht anwendbar und erfordert keine Rechenarbeit, da bei ihm die Greensche Funktion nicht explizit benötigt wird, liefert aber dafür etwas grobe Schranken; mit

$$Z = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad \lambda_z = \frac{\pi^2}{4}, \quad p = 1 + x^2, \quad |p|_{\max} = 2$$

ergibt (22) den nahe an 1 gelegenen Wert  $K = \frac{8}{\pi^2}$ ; damit wird  $\frac{K}{1-K} = \frac{8}{\pi^2 - 8} \approx 4,29$ ; mit

$$\|u_1 - u_2\| = \text{Obere Grenze von}_{\text{in } \langle -1, 1 \rangle} \left| \frac{u_1 - u_2}{\cos \frac{\pi}{2} x} \right| = 0,00555$$

erhält man nach (3) und (18) die Fehlerabschätzung

$$|u_2 - u| \leq 0,0238 \cos \frac{\pi}{2} x \quad \text{für} \quad |x| \leq 1.$$

<sup>3)</sup> Ausführlicher, aber ohne Fehlerabschätzung, in L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951, S. 179.

Genauere Abschätzungen erhält man, wenn man die Greensche Funktion explizit heranzieht. Hier lautet sie

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(x+1)(1-\xi)}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq \xi \\ \frac{(\xi+1)(1-x)}{2} & \text{für } \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (29).$$

Für den Normbegriff  $\|f\| = \text{Max } |f|$  ergibt Gleichung (24):

$$K = \text{Max}_{|x| \leq 1} \int_{-1}^1 G(x, \xi) (1 + \xi^2) d\xi = \text{Max}_{|x| \leq 1} \frac{1}{12} (7 - 6x^2 - x^4) = \frac{7}{12}.$$

Dieser Wert von  $K$  ist viel günstiger als der obige Wert  $\frac{8}{\pi^2}$ ; jetzt wird  $\frac{K}{1-K} = \frac{7}{5} = 1,4$ ; (man erhält bereits für  $u_1$  an der Stelle  $x=0$  engere Schranken als oben für  $u_2$ ).

$$\text{Mit } \|u_1 - u_2\| = \text{Max}_{|x| \leq 1} |u_1 - u_2| = \frac{221}{80640} \approx 0,00274 \text{ wird nach (3)}$$

$$|u_2 - u| \leq \frac{221}{57600} \approx 0,00384.$$

Noch besser wird die Abschätzung mit der Norm (25), wobei man als  $W$  in diesem Falle der bequemen Integration wegen ein Polynom wählt, hier zweckmäßig  $W=1-x^2$ . In (27) ist das Integral auszuwerten:

$$\int_{-1}^1 G(x, \xi) (1 + \xi^2) (1 - \xi^2) d\xi = \frac{1}{30} (14 - 15x^2 + x^6) = \frac{(1-x^2)(14-x^2-x^4)}{30};$$

es wird  $K = \text{Max}_{|x| \leq 1} \frac{14-x^2-x^4}{30} = \frac{7}{15}$  und man erhält den günstigen Wert  $\frac{K}{1-K} = \frac{7}{8}$ .

Mit  $\|u_1 - u_2\| = \frac{11}{2520}$  ergibt sich somit

$$|u_2 - u| \leq \frac{77}{20160} (1 - x^2) \approx 0,00382 (1 - x^2).$$

Eine entsprechende Rechnung mit der Funktion  $W=1-\frac{1}{2}x^2$  (mit  $K=\frac{21}{40}$ ) führt zu der Abschätzung:

$$|u_2 - u| \leq 0,00325 \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Diese Fehlerschranke übersteigt z.B. bei  $x=0$  den tatsächlichen Fehler 0,00271 um weniger als 20 %.

## 5. Eine Klasse nichtlinearer Aufgaben

Nun sei an Stelle der linearen Differentialgleichung (5) die Gleichung

$$L[u] + F(x_j, u) = 0 \text{ in } B \quad \dots \dots \dots (30)$$

vorgelegt, während die Randbedingungen dieselben wie in (6), also linear sein mögen.  $L[u]$  habe die gleiche Bedeutung wie in Nr. 2, sei also wieder ein linearer Differentialausdruck;  $F(x_j, u)$  sei eine gegebene Funktion der  $x_1, \dots, x_n, u$  mit stetiger partieller Ableitung nach  $u$ . Die Iterationsvorschrift lautet hier

$$\left. \begin{aligned} L[u_{n+1}] + F(x_j, u_n) &= 0 & \text{in } B \\ U[u_{n+1}] &= \gamma_\mu & \text{auf } \Gamma_\mu \end{aligned} \right\} (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (31).$$

Wieder sei die Randwertaufgabe (8) bei beliebigen stetigen  $r, \gamma_\mu$  eindeutig lösbar und es existiere eine Greensche Funktion, welche die Aufgabe (8) für  $\gamma_\mu=0$  in der Form (9) löst. Wie in Nr. 2 wird mit Hilfe einer die inhomogenen Randbedingungen erfüllenden Funktion  $\tilde{u}$  gesetzt  $u = \tilde{u} + v, u_n = \tilde{u} + v_n$ . Demgemäß ist die Transformation  $g = Tf$  definiert durch

$$L[g] + F(x_j, \tilde{u} + f) + [L\tilde{u}] = 0 \quad \text{in } B, \quad U_\mu[g] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad \dots \dots (32).$$

Es gilt dann  $v_{n+1} = Tv_n, v = Tv$ .

Zur Festlegung der Lipschitzkonstanten  $K$  bilden wir mit  $g_1 = Tf_1$ ,  $g_2 = Tf_2$ :

$$L[g_1 - g_2] = F(x_j, \tilde{u} + f_2) - F(x_j, \tilde{u} + f_1), \quad U_\mu[g_1 - g_2] = 0 \quad \dots \quad (33).$$

In einem bezüglich  $u$  konvexen Bereich  $S$  des  $x_1 \dots x_n$ - $u$ -Raumes, der eine Lösung  $u$  und die  $u_n$  enthält, möge  $F$  einer Lipschitzbedingung genügen

$$|F(x_j, z) - F(x_j, z^*)| \leq N(x_j)|z - z^*| \quad \dots \quad (34);$$

dann ist also mit  $h = f_1 - f_2$ ,  $H = Tf_1 - Tf_2$

$$|L[H]| \leq N|h| \quad \text{in } B, \quad U_\mu[H] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad \dots \quad (35).$$

Nun können zwei Wege begangen werden.

1. Weg. Es wird die Greensche Funktion benutzt; es sei  $W(x_j)$  wie in Nr. 3 eine in  $B$  positive (eventuell auch nichtnegative) Funktion, und als Norm wird wie in (25):

$$\|f\| = \text{Obere Grenze von } \left| \frac{f}{W} \right| \quad \text{in } B \quad \dots \quad (36)$$

benutzt. Wir schreiben (35) in der Gestalt

$$L[H] = \vartheta \cdot N \cdot |h| \quad \text{mit} \quad |\vartheta| \leq 1,$$

und nach (9)

$$H = \int_B \vartheta(\xi_j) G(x_j, \xi_j) N(\xi_j) |h(\xi_j)| d\xi_j;$$

daraus:

$$|H| \leq \int_B |G(x_j, \xi_j) N(\xi_j) h(\xi_j)| d\xi_j \leq \|h\| \int_B |G(x_j, \xi_j) N(\xi_j) W(\xi_j)| d\xi_j \quad \dots \quad (37);$$

als Lipschitzkonstante ist daher

$$K = \text{Obere Grenze von } \frac{\int_B |G(x_j, \xi_j) N(\xi_j)| W(\xi_j) d\xi_j}{W(x_j)} \quad \text{in } B \quad \dots \quad (38)$$

verwendbar. Diese Formel enthält (27) als Spezialfall.

2. Weg. Wir benutzen den Begriff der Randwertaufgabe monotoner Art in einer speziellen Fassung<sup>4)</sup>, wobei wir uns weiterhin auf reelle Größen beschränken; wir sagen, bei der Aufgabe (30), (6) liege monotone Art vor, wenn aus

$$L[v] \leq L[w] \quad \text{in } B, \quad U_\mu[v] = U_\mu[w] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad \dots \quad (39)$$

folgt  $v \leq w$ ; dabei sollen  $v, w$  zwei Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen so hoher Ordnung sein, wie sie bei  $L$  und  $U_\mu$  benötigt werden.

Nun sei  $z(x_j)$  eine Funktion mit

$$L[z] = A(x_j) \geq \alpha > 0 \quad \text{in } B, \quad U_\mu[z] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad \dots \quad (40).$$

Dabei sei  $\alpha$  eine Konstante. Unter unseren Voraussetzungen folgt dann aus

$$|L[\psi]| \leq D = \text{const} \quad \text{in } B, \quad U_\mu[\psi] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad \dots \quad (41)$$

die Abschätzung

$$|\psi| \leq \frac{zD}{\alpha} \quad \dots \quad (42);$$

denn aus

$$\left. \begin{aligned} L\left[\frac{-zD}{\alpha}\right] &\leq -D \leq L[-\psi] \quad \text{und} \quad L[\psi] \leq D \leq L\left[\frac{zD}{\alpha}\right] \\ U_\mu\left[\pm \frac{zD}{\alpha}\right] &= U_\mu[\pm \psi] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (43)$$

erhält man wegen der monotonen Art

$$|\psi| \leq |z| \frac{D}{\alpha} \quad \dots \quad (44);$$

hieraus ergibt sich  $\psi = 0$  für  $D = 0$ ; aus  $L[\varphi] = 0$ ,  $U_\mu[\varphi] = 0$  folgt also  $\varphi = 0$ ; es muß somit nach (40)  $z \geq 0$  sein; man kann also in (44) bei  $z$  die Absolutstriche fortlassen und hat damit (42). Nun wenden wir (41), (42) auf (35) an:

$$|H| \leq \frac{z|N|_{\max} h}{\alpha} \quad \dots \quad (45).$$

<sup>4)</sup> Etwas allgemeiner in L. Collatz: Aufgaben monotoner Art. Arch. Mathematik 3 (1952).

Ist  $W(x_i)$  eine Funktion wie beim 1. Weg, so erhält man mit der Norm (36):

$$\|H\| \leq \frac{|Nz|_{\max}}{\alpha} \cdot \|h\| \dots \dots \dots (46);$$

also ist als Lipschitzkonstante

$$K = \frac{|Nz|_{\max}}{\alpha} \dots \dots \dots (47)$$

verwendbar.

### 6. Beispiel einer nichtlinearen Aufgabe

Die Randwertaufgabe laute:

$$-u'' + u + \frac{1}{4}u^2 = 0, \quad u(\pm 1) = 1 \dots \dots \dots (48);$$

$u(x)$  läßt sich deuten als stationäre Temperaturverteilung in einem Stab (Enden  $x = \pm 1$  auf konstanter Temperatur  $u = 1$ , an die Umgebung der Temperatur  $u = 0$  findet Wärmeabgabe proportional  $u + \frac{1}{4}u^2$  statt). Die Existenz einer Lösung  $u(x)$  im Bereich  $0 \leq u \leq 1$  ist physikalisch evident und ergibt sich auch mathematisch nachher unmittelbar. Beginnt man die Iteration mit einer die Randbedingungen erfüllenden Funktion

$$u_0 = 1 + a(1 - x^2)$$

und bestimmt  $a$  aus  $u_1(0) = u_0(0)$ , so erhält man  $a = \begin{cases} -0,394 \\ -17,3 \end{cases}$ ; rundet man ab zu  $a = -0,4$ , wählt also

$$u_0 = \frac{1}{5}(3 + 2x^2),$$

so wird

$$u_1 = \frac{1}{3000}(1831 + 1035x^2 + 130x^4 + x^6).$$

Zur Abschätzung verwenden wir etwa die Norm

$$\|f\| = \text{Obere Grenze von } \left| \frac{f}{1-x^2} \right| \dots \dots \dots (49).$$

Im Gebiet  $0 \leq u \leq 1$  ist  $\frac{\partial F}{\partial u} = 1 + \frac{1}{2}u$  höchstens  $\frac{3}{2}$ ; also setzen wir  $N = \frac{3}{2}$ . Die Greensche Funktion ist dieselbe wie im Beispiel Nr. 4, stimmt also mit (29) überein. In (38) benötigen wir

$$\int_{-1}^1 G(x, \xi)(1 - \xi^2) d\xi = \frac{(1 - x^2)(5 - x^2)}{12}.$$

Nach (38) ist daher

$$K = \text{Max}_{|x| \leq 1} \frac{5 - x^2}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{8}, \text{ also } \frac{K}{1 - K} = \frac{5}{3}$$

und

$$\|u_1 - u_0\| = \text{Max}_{|x| \leq 1} \frac{1}{3000} |31 - 134x^2 - 4x^4| = \frac{107}{3000}.$$

In dem Streifen  $u_1 \pm \frac{107}{1800}(1 - x^2)$ , der dem Rechteck  $|x| \leq 1, 0 \leq u \leq 1$  angehört, liegen nach (4) sämtliche Iterierte  $u_n$ .

Wir verwenden daher als Raum  $\mathfrak{R}$  die Gesamtheit der in  $\langle -1, 1 \rangle$  stetigen Funktionen  $f(x)$  mit  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Dieser Raum ist bei dem Normbegriff  $\|f\| = \text{Max}_{\langle -1, 1 \rangle} |f|$  und daher auch bei dem Normbegriff (49) vollständig<sup>5)</sup>; jede konvergente Elementenfolge ist zugleich eine gegen eine stetige Grenzfunktion gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, und die Folge der  $u_n$

<sup>5)</sup> Vgl. z. B. St. Banach: *Théorie des Operations Linéaires* 1932. Neudruck New York 1949, S. 11.

konvergiert daher ebenfalls gleichmäßig in  $\langle -1, 1 \rangle$  gegen eine stetige Grenzfunktion  $u(x)$ , welche Lösung der Integralgleichung

$$u(x) = \int_{-1}^1 G(x, \xi) \left[ u(\xi) + \frac{1}{4} u(\xi)^2 \right] d\xi$$

und damit auch der Randwertaufgabe (48) ist. Im Bereich  $0 \leq u \leq 1$  ist die Lösung der Randwertaufgabe zugleich eindeutig; ob die Randwertaufgabe sonst noch Lösungen besitzt, wird hierdurch nicht entschieden. Nach (3) gilt dann

$$\|u_1 - u\| \leq \frac{107}{3000} \cdot \frac{5}{3} \approx 0,0595$$

oder

$$|u_1 - u| \leq \frac{107}{1800} (1 - x^2);$$

Engere Schranken für die Lösung kann man durch Fortsetzung der Iteration erhalten, bequemer aber durch Anbringen kleiner Änderungen; so kommt man z.B. zu der Näherung:

$$u_0 = 0,608 + 0,352 x^2 + 0,04 x^4$$

dann wird

$$u_1 = 0,6086400 + 0,3502080 x^2 + 0,0382507 x^4 + 0,0027712 x^6 + 0,0001257 x^8 + 0,0000044 x^{10};$$

man erhält  $\|u_1 - u_0\| = 0,0035478$

und damit  $|u_1 - u| \leq 0,005913 (1 - x^2)$ .

Mit der Norm

$$\|f\| = \max_{|x| \leq 1} \left| \frac{f(x)}{1 - \frac{x^2}{2}} \right|$$

wie im Beispiel Nr. 4 erhält man auch hier in der Mitte des Intervalls  $\langle -1, 1 \rangle$  günstigere Ergebnisse; es wird

$$K = \frac{11}{16}, \frac{K}{1 - K} = \frac{11}{5} = 2,2; \|u_1 - u_0\| = 0,000765$$

und

$$|u_1 - u| \leq 0,00169 \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right).$$

Der Fehler von  $u_1$  beträgt also an der Stelle  $x=0$  höchstens 0,28%. Mit der Norm (23) wird  $K = \frac{3}{4}$  und man erhält wieder etwas gröbere Schranken, nämlich

$$|u_1 - u| \leq 0,00192.$$

## 7. Allgemeinere nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch in verschiedenen Fällen durchführen, bei denen die Nichtlinearität der Differentialgleichung sich nicht nur auf  $u$ , sondern auch auf Ableitungen von  $u$  erstreckt. Es seien die gewöhnliche Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung:

$$L[u] = F(x, u, u', \dots, u^{(s)}) \dots \dots \dots (50)$$

und die Randbedingungen an zwei Stellen  $a, b$ : ( $b > a$ ):

$$U_\mu[u] = \gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k) \dots \dots \dots (51)$$

gegeben. Hierbei sei  $k > s$ ,  $L[u]$  ein linearer homogener Differentialausdruck in  $u$ , die Randbedingungen linear und  $F$  eine gegebene Funktion seiner Argumente.  $F$  genüge einer Lipschitzbedingung:

$$|F(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(s)}) - F(x, u_2, u_2', \dots, u_2^{(s)})| \leq \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) |u_1^{(\sigma)} - u_2^{(\sigma)}| \quad \text{mit } A_\sigma(x) \geq 0 \quad (52),$$

ferner sei die Randwertaufgabe

$$L[u] = r(x), \quad U_\mu[u] = 0, \quad (\mu = 1, \dots, k) \dots \dots \dots (53)$$

bei beliebigem  $r(x)$  eindeutig lösbar mit Hilfe der Greenschen Funktion  $G(x, \xi)$  in der Form

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi. \quad (54).$$

Schließlich sei diese Formel  $s$ -mal nach  $x$  differenzierbar

$$u^{(\sigma)}(x) = \int G^{(\sigma)}(x, \xi) r(\xi) d\xi \quad (\sigma = 0, 1, \dots, s) \quad (55)$$

mit

$$G^{(\sigma)}(x, \xi) = \frac{\partial^{(\sigma)} G(x, \xi)}{\partial x^\sigma}.$$

Die Transformation  $g = Tf$  wird dann definiert durch

$$L[g] = F(x, f, f', \dots, f^{(s)}) \quad U_\mu[g] = \gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k) \quad (56).$$

Für Funktionen  $f_1, f_2, g_1, g_2$  mit  $g_j = Tf_j$  ( $j = 1, 2$ ) und  $h = f_1 - f_2$ ,  $H = Tf_1 - Tf_2$  gilt dann

$$L[H] = F(x, f_1, f_1', \dots, f_1^{(s)}) - F(x, f_2, f_2', \dots, f_2^{(s)}), \quad U_\mu[H] = 0$$

oder

$$\left. \begin{aligned} |H^{(\tau)}(x)| &= \int_a^b G^{(\tau)}(x, \xi) [F(\xi, f_1, \dots, f_1^{(s)}) - F(\xi, f_2, \dots, f_2^{(s)})] d\xi \\ &\leq \int_a^b |G^{(\tau)}(x, \xi)| \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(\xi) |h^{(\sigma)}(\xi)| d\xi \end{aligned} \right\} \quad (57).$$

Nun verwenden wir als Norm einer  $s$ -mal stetig differenzierbaren Funktion

$$\|f\| = \text{Obere Grenze von } \frac{1}{W(x)} \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) |f^{(\sigma)}(x)| \quad (58),$$

wobei  $W(x)$  eine in  $a \leq x \leq b$  positive (evtl. auch nichtnegative) Funktion ist; dann wird

$$\sum_{\tau=0}^s A_\tau(x) |H^{(\tau)}(x)| \leq \|h\| \sum_{\tau=0}^s A_\tau(x) \int_a^b |G^{(\tau)}(x, \xi)| W(\xi) d\xi \quad (59).$$

Als Lipschitzkonstante  $K$  der Transformation  $T$  ist daher

$$K = \text{Obere Grenze von } \frac{1}{W(x)} \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) \int_a^b |G(x, \xi)| W(\xi) d\xi \quad (60)$$

verwendbar.

## 8. Spezialfall einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

Als Beispiel greifen wir den Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$L[u] = -u'' = F(x, u, u') \quad (61)$$

mit den Randbedingungen  $u(a) = u_a$ ,  $u(b) = u_b$  heraus. Wählen wir etwa  $a = 0$ , so lautet die Greensche Funktion:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{b}(b - \xi) & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\xi}{b}(b - x) & \text{für } \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (62).$$

Der Einfachheit halber wollen wir  $A_0$  und  $A_1$  in (52) durch Konstanten ersetzen. Tritt in der Differentialgleichung (61)  $u'$  nicht explizit auf, ist also  $A_1 = 0$ , so kann man für  $W(x)$  die Eigenfunktion  $\sin \frac{\pi x}{b}$  wählen und hat wegen

$$\frac{\int_0^b G(x, \xi) \sin \frac{\pi \xi}{b} d\xi}{\sin \frac{\pi x}{b}} = \frac{b^2}{\pi^2} \quad (63)$$

nach (60) die Lipschitzkonstante

$$K = \frac{A_0 b^2}{\pi^2} \quad (64).$$

Ist jedoch  $A_1 \neq 0$ , so würde für diese Wahl von  $W(x)$  keine endliche obere Grenze in (60) existieren; wir wählen dann etwa  $W(x) = 1 - \alpha z$  mit  $z = \frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)$  und  $\alpha < 4$ ; dann ist  $W > 0$  in  $0 \leq x \leq b$ .

Mit

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \max_{0 \leq x \leq b} \frac{\int_0^b G(x, \xi) W(\xi) d\xi}{W(x)} = \max_{0 \leq z \leq 1/4} \frac{b^2 z \left(1 - \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha}{6} z\right)}{2(1 - \alpha z)} \\ k_1 &= \max_{0 \leq x \leq b} \frac{\int_0^b G'(x, \xi) W(\xi) d\xi}{W(x)} = \max_{0 \leq z \leq 1/4} \frac{b \frac{6 - \alpha}{12} - z + \frac{\alpha}{2} z^2}{1 - \alpha z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

hat man dann die Lipschitzkonstante

$$K = A_0 k_0 + A_1 k_1 \dots \dots \dots (66);$$

wir geben einige Zahlen an: Für  $\alpha = 0$  wird  $W = 1$  und die Rechnung einfacher als bei  $\alpha \neq 0$ ; es folgt:

$$K = \frac{A_0 b^2}{8} + \frac{A_1 b}{2}; \dots \dots \dots (67)$$

für  $\alpha \neq 0$  kann man allerdings mit mehr Rechenaufwand oft schärfere Abschätzungen erzielen; für

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(15 - \sqrt{33}\right) \approx 2,314 \text{ folgt}^6) \text{ mit } \beta = \frac{9 + \sqrt{33}}{48} \approx 0,3072$$

$$K = \beta \left( \frac{A_0 b^2}{2} + A_1 b \right) \dots \dots \dots (68).$$

Hat man bei der Differentialgleichung (61) die Randbedingungen (etwa mit  $a = 0$ )

$$u(0) = u_0; \quad u'(b) = u'_b \dots \dots \dots (69),$$

so tritt an Stelle von (62) die Greensche Funktion:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \\ \xi & \text{für } \xi \leq x \leq b \end{cases}.$$

Tritt in (61)  $u'$  nicht auf, ist also  $A_1 = 0$ , so erhält man mit

$$W(x) = \sin \frac{\pi x}{2b} \text{ die Lipschitzkonstante}$$

$$K = \frac{4 A_0 b^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (70).$$

Ist jedoch  $A_1 \neq 0$ , so muß man wie oben andere Funktionen  $W(x)$  verwenden; bei  $W(x) = 1$  erhält man

$$K = A_0 \frac{b^2}{2} + A_1 b \dots \dots \dots (71)$$

und<sup>7)</sup> bei  $W(x) = 3 - 6x + 4x^2$ :

$$K = A_0 b^2 \cdot 0,636 + \frac{4}{9} A_1 b \dots \dots \dots (72).$$

<sup>6)</sup> Vgl. F. Lettenmeyer: Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, Dtsch. Math. 7 (1944), S. 56–74. Lettenmeyer bewies Konvergenz des Iterationsverfahrens bei Ausgehen von einer linearen, die Randbedingungen erfüllenden Funktion  $u_0(x)$  gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Randwertaufgabe im Falle  $A_0 \frac{b^2}{\pi^2} + A_1 \frac{4}{\pi^2} b < 1$ . Der Vergleich zeigt, daß die optimale Konstante  $\frac{b^2}{\pi^2}$  auch hier bei (64) für  $A_1 = 0$  auftritt, daß aber im Falle  $A_1 \neq 0$  in (68) der Faktor von  $A_0$  ungünstiger und der von  $A_1$  günstiger ist als bei Lettenmeyer.

<sup>7)</sup> F. Lettenmeyer: a. a. O. hat bei den Randbedingungen (69) die Bedingung  $\frac{4}{\pi^2} A_0 b^2 + \frac{2}{\pi} A_1 b < 1$ . Die optimale Konstante  $\frac{4}{\pi^2}$  tritt auch hier für  $A_1 = 0$  in (70) auf; im Falle  $A_1 \neq 0$  ist in (72) wieder (wie in (68)) der Faktor von  $A_0$  ungünstiger und der von  $A_1$  günstiger als bei Lettenmeyer.

## 9. Beispiel

Es sei

$$L[u] = -u'' = F(x, u, u') = 6x - uu'; \quad u(0) = u(1) = 0 \quad \dots \quad (73)$$

gegeben. Aus  $u_0 \equiv 0$  erhält man durch Iteration (nach (2) mit (56))

$$u_1 = x - x^3, \quad u_2 = \frac{1}{210} (202x - 175x^3 - 42x^5 + 15x^7);$$

die Unterschiede sind

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{210} (x - x^3) (8 - 27x^2 + 15x^4)$$

$$u_1' - u_2' = \frac{1}{210} (8 - 105x^2 (1 - x^2)^2).$$

Es tritt wieder die Schwierigkeit der Abgrenzung eines konvexen Bereiches auf, der eine Lösung und die Näherungsfunktionen enthält. Wir gehen von dem groben Bereich

$$0 \leq x \leq 1, \quad |u| \leq 1, \quad |u'| \leq 3$$

aus. Der Bereich wird nachher schrittweise mehrmals verkleinert, und damit werden die Fehlerabschätzungen stark verbessert; aber zunächst verwenden wir als Raum  $\mathfrak{R}$  die Gesamtheit der in  $\langle -1, 1 \rangle$  stetig differenzierbaren Funktionen  $f(x)$  mit  $|f| \leq 1, |f'| \leq 3$ . Bei dem Normbegriff  $\|f\| = \text{Max}_{\langle -1, 1 \rangle} (A \cdot |f| + B \cdot |f'|)$  mit  $A, B$  als positiven Konstanten ist dieser Raum vollständig und es sind für jede konvergente Elementenfolge  $f_n$  zugleich  $f_n(x)$  und  $f_n'(x)$  gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen  $f(x)$  bzw.  $f'(x)$  konvergent<sup>8)</sup>.

1. Ansatz.

Mit

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| = |u'| \leq A_0 = 3, \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial u'} \right\| = |u| \leq A_1 = 1$$

hat man nach (67) (die Rechnung nach (68) bringt im Endergebnis nicht viel mehr, da die Lipschitzkonstante nur wenig kleiner wird)

$$K = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}, \quad \frac{K}{1-K} = 7;$$

wir arbeiten also zunächst mit der Norm:

$$\|f\| = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} (3|f| + |f'|).$$

Vorläufig schätzen wir grob ab

$$|u_1 - u_2| \leq 0,0075, \quad |u_1' - u_2'| \leq 0,0382$$

$$\|u_1 - u_2\| \leq 3 \cdot 0,0075 + 0,0382 = 0,0607.$$

Zugleich sehen wir, daß der oben zugrunde gelegte Raum  $\mathfrak{R}$  nicht nur  $u_0, u_1, u_2$ , sondern nach der Abschätzung (4) auch alle weiteren  $u_n$  und wegen der Vollständigkeit auch eine Grenzfunktion  $u(x)$  enthält, derart, daß in  $\langle 0, 1 \rangle$  gleichmäßig  $u_n$  gegen  $u$  und  $u_n'$  gegen  $u'$  konvergieren. Diese Grenzfunktion  $u(x)$  ist Lösung von

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) F(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi$$

und damit Lösung der Randwertaufgabe (73). Wieder ist in  $\mathfrak{R}$  die Lösung der Randwertaufgabe eindeutig; aber ob sonst noch Lösungen der Randwertaufgabe existieren, wird hierdurch noch nicht entschieden.

Nachdem so die Frage nach der Existenz einer Lösung  $u(x)$  beantwortet ist, liefert die Fehlerabschätzung (3) unmittelbar

$$\|u_2 - u\| \leq 7 \cdot 0,0607 = 0,4249;$$

es ist somit

$$3 \cdot |u_2 - u| + |u_2' - u'| \leq 0,4249, \quad \text{d. h.}$$

$$|u_2 - u| \leq 0,142, \quad |u_2' - u'| \leq 0,425 \quad \text{und damit}$$

$$|u| \leq |u_2| + 0,142 \leq 0,535$$

$$|u'| \leq |u_2'| + 0,425 \leq 2,463.$$

<sup>8)</sup> Vgl. z. B. St. Banach: a. a. O.

Diese Werte nehmen wir als Ausgangswerte beim

2. Ansatz:

$$A_0 = 2,463, \quad A_1 = 0,535, \quad K = \frac{A_0}{8} + \frac{A_1}{2} = 0,576;$$

der jetzige Wert  $\frac{K}{1-K} = 1,36$  ist schon wesentlich günstiger als beim 1. Ansatz. Mit der Norm

$$\|f\| = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} (2,463|f| + 0,535 \cdot |f'|)$$

führen wir dieselbe Rechnung wie beim 1. Ansatz durch, wobei wir nur jetzt etwas sorgfältiger die Funktion

$$2,463 \cdot |u_1 - u_2| + 0,535 |u_1' - u_2'|$$

berechnen und ihr Maximum bestimmen. Man kommt so zu engeren Schranken für  $u$  und  $u'$  und damit abermals zu kleineren Werten von  $A_0$  und  $A_1$ .

Beim

3. Ansatz

$$A_0 = 2,110, \quad A_1 = 0,409, \quad \text{also } K = 0,469, \quad \frac{K}{1-K} = 0,882$$

und der Norm

$$\|f\| = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} (2,11 \cdot |f| + 0,409 \cdot |f'|)$$

erhält man

$$2,11 \cdot |u_2 - u| + 0,409 \cdot |u_2' - u'| \leq 0,0210,$$

also

$$|u_2 - u| \leq 0,01; \quad |u_2' - u'| \leq 0,052.$$

Wir brechen hier ab, da eine Fortführung die Schranken nur noch wenig herabdrückt.

## Ein Beispiel zum Mittelwertsatz der ebenen Elastizitätstheorie

Herrn R. v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

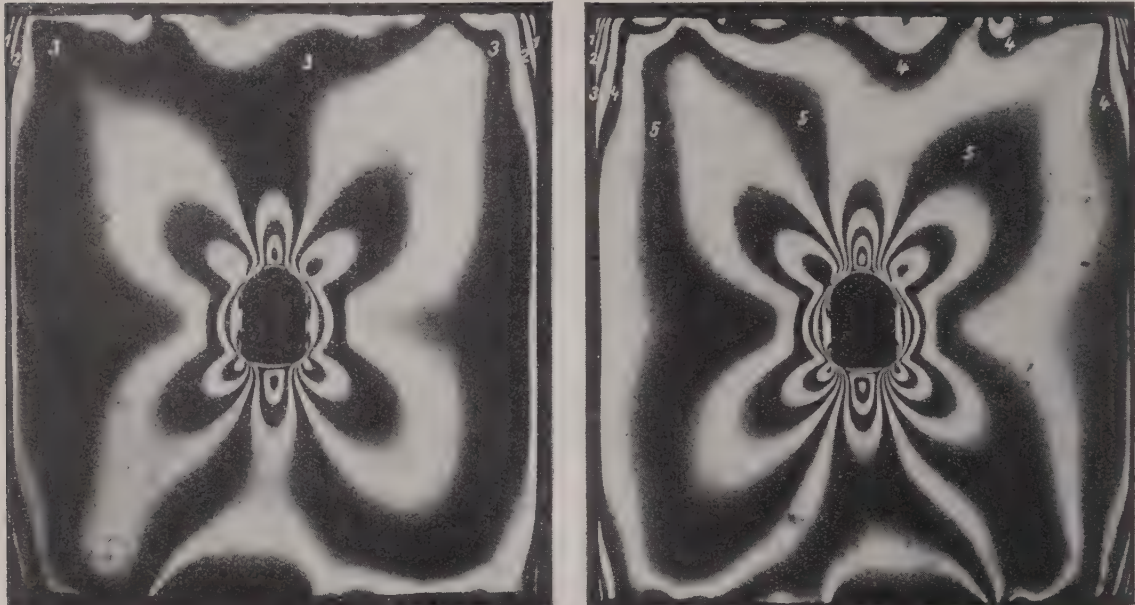
Von Ludwig Föppl in München

Der Verfasser hat in der Sitzung der Bayr. Akademie der Wissenschaften vom 7. Nov. 1952 über einen Mittelwertsatz der ebenen Elastizitätstheorie vorgetragen, für den der Beweis in den Akademieberichten demnächst erscheinen wird. Der Satz lautet folgendermaßen:

„Schneidet man aus einer Scheibe, die einem ebenen Spannungszustand unterworfen ist, wobei Einzelkräfte nicht im Innern der Scheibe, sondern nur am Rande angreifen dürfen, ein Loch aus, dessen Abmessungen gegenüber den Abständen des Lochrandes von den Scheibenrändern klein sein sollen, so ist der Mittelwert der Randspannungen längs des Loches, gleich dem Mittelwert der Spannungssumme  $q = \sigma_x + \sigma_y$  längs der Kontur des Loches in der ungelochten Scheibe.“

Für eine sehr ausgedehnte Scheibe, die unter gleichmäßigem Zug oder Druck steht, läßt sich der Spannungszustand für ein kreisförmiges und für ein elliptisch geformtes Loch rechnerisch angeben und daher auch der oben angegebene Mittelwertsatz rechnerisch nachweisen. Hier soll die Gültigkeit des Mittelwertsatzes für eine Lochform nach Bild 1a, b mit Hilfe der Spannungsoptik nachgewiesen werden. Dabei wurde die Scheibe aus Dekorit von 1 cm Dicke, 10,4 cm Breite und 12 cm Höhe über ihre Breite gleichmäßig gedrückt. Dem Isochromatenbild 1a bzw. 3a entspricht der geringere und dem Isochromatenbild 1b bzw. 3b der höhere Druck. Um einen möglichst gleichmäßig verteilten Druck in die Scheibe einzuleiten, wurde auf den oberen und unteren Rand der Scheibe je eine Schicht Löschpapier gelegt und die von oben mit Hilfe einer Schraubenspindel ausgeübte Druckkraft über eine Traverse eingeleitet. Nach unseren Erfahrungen erhält man durch die Zwischenlagen aus Löschpapier eine über die Breite der Scheibe gleichmäßig verteilte Druckkraft. Man hätte die Druckkraft durch Zwischenschalten eines Kraftmessers bestimmen

können. Mit der durch Einbau eines Kraftmessers erhöhten Vorrichtung wäre aber die Gefahr des Ausknickens in Richtung senkrecht zur Scheibe verbunden gewesen. Um dies zu vermeiden, hätte man mit wesentlich geringeren Druckkräften arbeiten müssen, worunter die Genauigkeit der Auswertung gelitten hätte. In unserem Fall ist die Kenntnis der Größe der

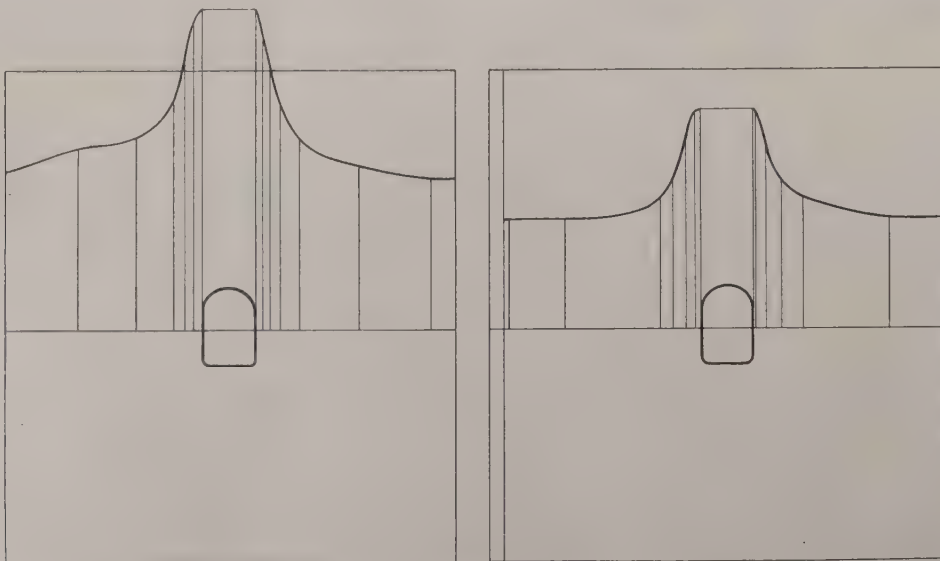


1a

Bild 1

1b

Drucklast nicht notwendig, da der Mittelwertsatz statt in Spannungen ebensogut in Isochromatenordnungen ausgedrückt werden kann. Damit entfällt zugleich die Notwendigkeit eines Eichversuches. In unserem Beispiel ließ sich aus dem Verlauf der Isoklinen feststellen, daß die Hauptspannungslinien für einen Querschnitt der Scheibe, der ungefähr durch die Mitten der parallelen Seiten des Loches verläuft (s. Bild 2a, b) senkrecht zu diesem Schnitt stehen, so daß der Schnitt selbst eine Hauptspannungslinie der zweiten Schar darstellt. Wenn man

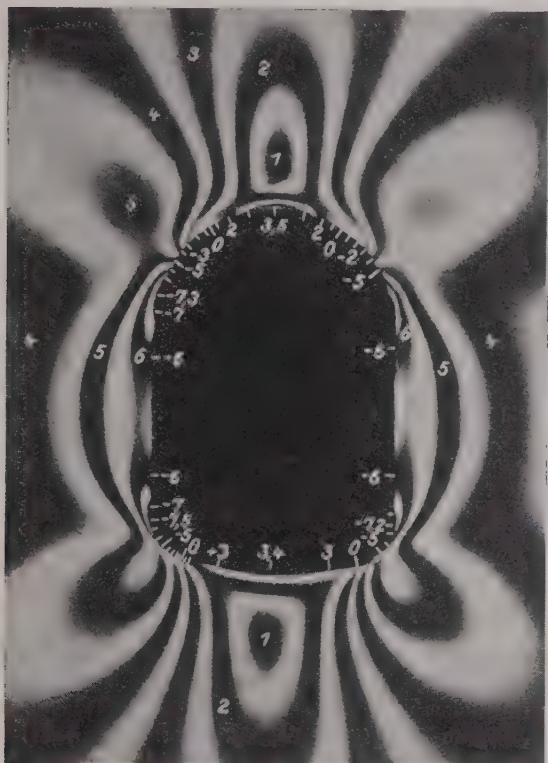


2a

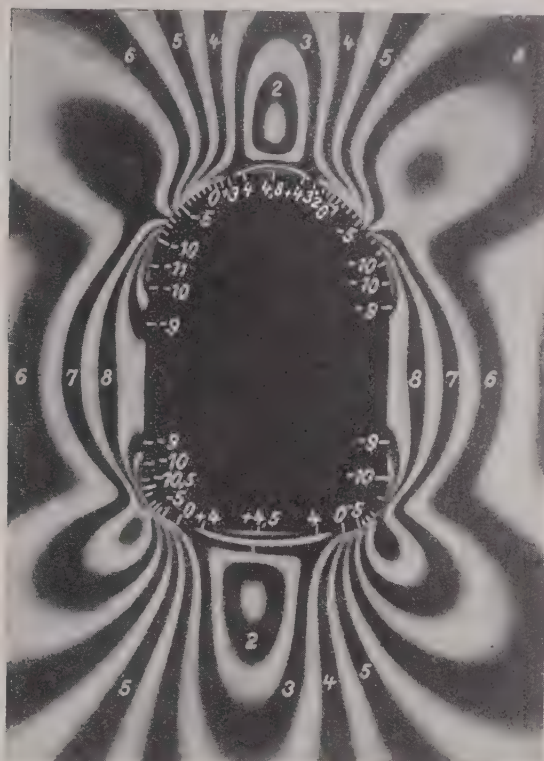
Bild 2

2b

von den sehr geringen Druckspannungen in Richtung diese Schnittes absieht und nur die Normalspannungen senkrecht zum Schnitt berücksichtigt, so daß sie allein für die längs des Schnittes auftretenden Isochromaten verantwortlich sein sollen, so erhält man aus den Isochromatenbildern 1a und 1b die Verteilung der Isochromatenordnungen gemäß den Bildern 2a



3a



3b

Bild 3

und 2b, aus denen man durch Planimatrieren der Flächen und Dividieren durch den infolge des Loches geschwächten Querschnitt die in Ordnungen ausgedrückte mittlere Druckspannung zu

$$q_a = 3,04$$

und

$$q_b = 4,55$$

erhält. Beide Werte sind wegen der oben erwähnten Vernachlässigung der geringen Druckspannungen in Richtung des Querschnittes von Bild 2a und 2b etwas zu klein.

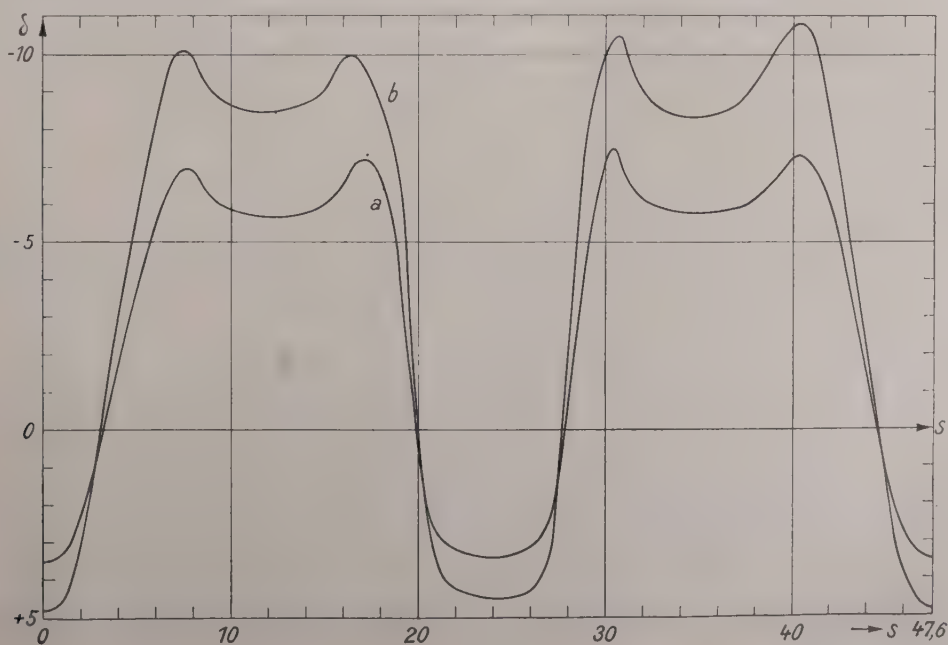


Bild 4

Die Isochromatenordnungen längs des Lochrandes wurden sorgfältig bestimmt und in die Bilder 3a und 3b eingetragen. In Bild 4 sind über dem abgewinkelten Lochrand  $s$  als Abszisse die Isochromatenordnungen —  $\delta$  als Ordinaten aufgetragen, wobei der Nullpunkt  $s=0$  dem Scheitelpunkt des Loches entspricht. Die zu Zugspannungen gehörigen Isochromatenordnungen wurden in 3a und 3b mit positiven und die zu Druckspannungen gehörigen mit negativen Vorzeichen versehen. Die Kurve  $a$  in Bild 4 entspricht Bild 3a und die Kurve  $b$  Bild 3b. Durch Ausplanimetrieren beider Kurven und Mittelbildung ergaben sich die Mittelwerte:

$$\bar{\sigma}_{t,a} = 3,10$$

und

$$\bar{\tau}_{t,b} = 4,72.$$

Nach dem Mittelwertsatz sollten diese Mittelwerte mit den oben angegebenen Werten von  $q_a$  bzw.  $q_b$  übereinstimmen. Beide liegen um 2 bzw. 3% höher als die Werte  $q_a$  und  $q_b$ . Man könnte die Übereinstimmung noch verbessern, wenn man bei der Berechnung von  $q_a$  und  $q_b$  die oben vernachlässigten geringen Druckspannungen in Richtung des Querschnittes berücksichtigen würde. Dadurch würden sich die Werte von  $q_a$  und  $q_b$  etwas vergrößern. Die Übereinstimmung ist aber ohnehin schon hinreichend, um die Gültigkeit des Mittelwertsatzes auch für ein beliebig aus der Scheibe ausgeschnittenes Loch nachzuweisen, wie es in unserem Beispiel geschehen ist.

## Einige Probleme Mendelscher Genetik

R. v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

Von Hilda Geiringer in Norton (Mass.)

Durch Mendels Vererbungslehre wurde in die moderne Genetik die Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt. Es ist bemerkenswert, daß auch in diesem Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur eine Häufigkeitstheorie den biologischen richtig Sinn der Aussagen liefert. Während für den Mathematiker heute Wahrscheinlichkeitstheorie wohl im weiten Maße eine Häufigkeitstheorie ist<sup>1)</sup>, sind wir in den Anwendungsgebieten von einer einheitlichen und klaren Auffassung weit entfernt. Gleich wie in Laplaces *Essay Philosophique* die Wahrscheinlichkeit als der berühmte Quotient definiert wird, während im gleichen Werk in den Anwendungen eben dieser Wahrscheinlichkeit von Häufigkeiten und wirklichem Ablauf des Geschehens bei Wiederholung die Rede ist, so steht es noch heute in vielen biologischen Darstellungen: Die Ausgangs-Wahrscheinlichkeiten, die in Mendels ursprüngliche Gesetze eingehen, sind „reine“ oder „a priori“ Wahrscheinlichkeiten, d.h. Laplacesche Quotienten; doch im Fortgang der Untersuchung gewinnt die Häufigkeitsauffassung naturgemäß und notwendig die Oberhand: Die Beobachtungsobjekte werden geordnet und gezählt, usw.

Abgesehen von dieser Inkonsistenz gibt es bereits am Ausgangspunkt, d.h. im Gebiet des „reinen“ Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Beobachtungen und Vorstellungen, die, gleich dem „falschen Würfel“ in ein Laplacesches Schema beim besten Willen nicht passen. Nennen wir einige Beispiele: Sowie man über den einfachsten Fall eines Mendelschen Merkmals (bei dem „gleichmögliche“ Fälle vorhanden sind), hinausgeht, tritt der sog. „crossover-Wert“ auf (s. Abn. 2), eine Wahrscheinlichkeit („Austausch—Wahrscheinlichkeit“), die nun nicht mehr auf Basis gleichmöglicher Fälle verstanden werden kann. Wir werden darüber und über die anschließenden Verallgemeinerungen des crossover-Wertes noch ausführlich sprechen. — Die Verhältnisse werden noch eindringlicher, wenn man, durch biologische Tatsachen veranlaßt, verschiedene Austauschverteilungen für die männlichen und weiblichen Wesen annimmt. — Schließlich tritt in der Theorie der sog. Polyploide in vielfacher Hinsicht die Notwendigkeit auf, über das bloße Abzählen von Kombinationen gleichmöglicher Fälle hinauszugehen.

Einige Arbeiten, die mich durch mehrere Jahre beschäftigten, sind in mehrfacher Weise zusammengehörig: Sie gehören dem Gebiet der Populationsgenetik an; sie basieren auf Mendels Theorie; die Untersuchung wird durchgehend im Sinne der rationalen Wahrscheinlichkeitstheorie geführt, wobei aus einigen Grundverteilungen neue uns interessierende Verteilungen und Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden; schließlich ist methodologisch jedesmal das gleiche Untersuchungsschema befolgt: Nach Definition der Grundverteilungen werden Rekursionsbeziehungen für gewisse Verteilungen in aufeinander folgenden Generationen gewonnen, diese werden sodann integriert, und es werden insbesondere die stabilen

<sup>1)</sup> Eine Axiomatik wie die von Kolmogoroff ist weder im Gegensatz noch in Übereinstimmung mit einer Häufigkeits-Definition und -Theorie. Eigentlich liefert sie die Grundlegung für die allgemeine Mathematik der Verteilungen.

Zustände untersucht, was zur Aufstellung von Grenzwertsätzen führt. Es ist Ziel dieses Artikels aus dieser Gruppe von Untersuchungen einiges zu berichten<sup>2)</sup>.

1. Die grundlegenden Verteilungen. Wir erklären diese zunächst an dem einfachen Fall eines („diploiden“) Mendelschen Charakters und unter Annahme von Panmixie. (Man versteht unter Panmixie [Zufalls-Paarung, random mating] daß alle jeweils möglichen Kreuzungen auch wirklich auftreten und zwar nach Zufallregeln. Wir kommen darauf noch eingehend zurück.) Mendels erste, sehr kühne Hypothese ist die folgende: Gewisse Charaktere — heute Mendelsche genannt — z. B. Blütenfarben (etwa rot und weiß im Falle der Erbsenblüte, rot, weiß und rosa im Falle von *mirabilis yalapa*) hängen in der einzelnen Pflanze nicht nur von einem Faktor sondern von einem Paar von Faktoren ab, den Genen, die wir hier mit  $R$  und  $W$  bezeichnen. Der Organismus, die Pflanze, insbesondere die befruchtete Keimzelle (Zygote) ist daher vom Typus  $RR$  oder  $RW = WR$  oder  $WW$ . Ein von einer solchen Zelle geformter und bei der Fortpflanzung weitergegebener Gamet (Ei oder Sperm) enthält nur einen der beiden Faktoren und zwar besteht für jede Wahl die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein neuer Zygote der nächsten Generation entsteht dann durch die Zufallspaarung eines männlichen und eines weiblichen Gameten, und zwar nach Zufallsregeln, d. h., wie wir sehen werden, gemäß Multiplikation unabhängiger Verteilungen<sup>3)</sup>.

Für jeden Charakter gibt es  $r$  Möglichkeiten (Allele), (z. B. die vielen verschiedenen möglichen Augenfarben bei *Drosophyla*). Wir bezeichnen einen Zygoten-Typus mit  $(x, y)$ , wobei

$$(x, y) = (y, x) \quad (x = 1, \dots, r, \quad y = 1, \dots, r) \quad \dots \quad (1).$$

Es gibt daher  $r(r+1)/2$  verschiedenen Zygoten (verschiedene Genotypen — der Begriff des Phänotypus tritt in unserer Untersuchung überhaupt nicht auf). Wir nehmen in dieser ganzen Untersuchung an, daß es Sinn hat von diskreten, nicht übergreifenden Generationen zu sprechen, und bezeichnen mit  $w^{(n)}(x, y) = w^{(n)}(y, x)$  die Verteilung der Genotypen in der  $n^{\text{ten}}$  Generation, dieselbe für beide Geschlechter, wobei natürlich

$$\sum_x \sum_y^{1 \dots r} w^{(n)}(x, y) = 1, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (1.2).$$

Unter dem ersten Argument in  $(x, y)$  oder  $w(x, y)$  verstehen wir das von der Mutter, unter dem zweiten das vom Vater ererbte Gen. Weiter besteht nach Mendels eben erklärter Annahme gleiche Wahrscheinlichkeit für die Segregation des einen oder andern dieser beiden Faktoren bei der Gametenbildung. Die Segregations-Verteilung besteht hier also nur aus der Alternative mit den Wahrscheinlichkeiten  $p = q = 1/2$ . Wichtig ist, daß die S. V. nicht von  $n$  abhängt und nicht vom speziellen Genotyp. Diese beiden Eigenschaften werden wir in viel allgemeineren Situationen stets wiederfinden. Aus den soweit erklärten Verteilungen, der Verteilung der Genotypen (V. Z.) und der Segregations-Verteilung (S. V.) leiten wir die Verteilung der Gameten (V. G.) ab,  $p^{(n)}(x)$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit (W.), daß ein Gamete der  $n^{\text{ten}}$  Generation den Faktor  $x$  besitzt. Diese ist sehr einfach zu finden. Um den Faktor  $x$  zu übertragen muß ein Zygote a) ein  $x$  besitzen, b) es übertragen. Ein Homozygot  $(x, x)$  überträgt  $x$  mit W. eins, ein Heterozygot  $(x, y)$  mit W. einhalb; daraus folgt, daß

$$p^{(n)}(1) = w^{(n)}(1, 1) \cdot 1 + w^{(n)}(1, 2) \cdot \frac{1}{2} + w^{(n)}(2, 1) \cdot \frac{1}{2} + \dots + w^{(n)}(r, 1) \cdot \frac{1}{2}$$

also

$$p^{(n)}(x) = \sum_y^{1 \dots r} w^{(n)}(x, y) \quad \text{wobei} \quad \sum_x p^{(n)}(x) = 1 \quad \dots \quad (1.3)$$

wegen (1.2) gilt. Schließlich folgt gemäß unserer Voraussetzung der Panmixie die Verteilung  $w^{(n+1)}(x, y)$  aus den  $p^{(n)}(x)$ :

$$w^{(n+1)}(x, y) = p^{(n)}(x) p^{(n)}(y), \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (1.4)$$

immer für  $x = 1, \dots, r, y = 1, \dots, r$ . Aus (1.3) und (1.4) erhält man nun in einer Zeile Hardy's berühmtes Gesetz von der Konstanz der Verteilung der Typen. Denn

$$p^{(n+1)}(x) = \sum_y w^{(n+1)}(x, y) = \sum_y p^{(n)}(x) p^{(n)}(y) = p^{(n)}(x), \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \dots \quad (1.5)$$

<sup>2)</sup> Dies mag gerechtfertigt scheinen, da diese Artikel auf mehrere, amerikanische, nicht mathematische Zeitschriften verteilt sind; sie umfassen etwa 170 Druckseiten. Diese Arbeiten des Verfassers werden von nun an als (G. (a)) usw. zitiert. — Aus Raummangel werden biologische Arbeiten nur sehr unvollständig zitiert, d. h. nur, wenn sie in direkter Beziehung zu den referierten Arbeiten stehen. Es sei auf das Literaturverzeichnis in (G. (g)) verwiesen.

<sup>3)</sup> Wir müssen auf biologisch vollständige und befriedigende Formulierungen leider verzichten. Unsere Objekte sind mathematisch begriffliche, schematische Modelle des biologischen Vorgangs. Doch ziehen wir es vor, die biologischen Vorstellungen anzudeuten, und nicht einfach mit „Urnschemen“ zu arbeiten.

und daraus auch

$$w^{(n+1)}(x, y) = w^{(n)}(x, y), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5').$$

Es ist hier durchweg Panmixie (random mating) vorausgesetzt worden. Diese ist, negativ, durch das Fehlen jeder Selektion definiert, positiv eben durch die Gleichungen (1.3) und (1.4). In (1.3) ist ausgedrückt, daß die Proportion der Gameten,  $p^{(n)}(x)$ , durch die der Eltern bestimmt ist, eine Proportion, die sich ihrerseits zwischen Geburt und Fortpflanzungsalter nicht geändert hat, und daß alle Genotypen ihrem vorhandenen Zahlenverhältnis gemäß (ohne einen vom Genotyp abhängigen Unterschied in der Fruchtbarkeit usw.) an der Zeugung der neuen Generation mitwirken. In (1.4) ist das Fehlen von Gattenwahl ausgedrückt. Im Gegensatz zu all dem würde die Formulierung einer allgemeineren Fortpflanzung etwa von der Form sein  $W_{\mu}^{(n+1)} = \sum_{\kappa, \lambda} \pi_{\kappa\lambda}^{(n)} \varrho_{\kappa\lambda}^{\mu}$ , wobei wir mit  $W_{\mu}^{(n+1)}$  die W. des Typus „ $\mu$ “ (durch beliebig viele Gene gekennzeichnet) bezeichnen, mit  $\pi_{\kappa\lambda}^{(n)}$  die W., daß zwei Typen  $\kappa$  und  $\lambda$  zur Zeugung zu sammentreffen (was außer vom Zahlenverhältnis der Typen von den verschiedensten Selektionen bestimmt sein mag) und mit  $\varrho_{\kappa\lambda}^{\mu}$  die W., daß aus dieser Vereinigung ein Typus  $\mu$  entsteht, eine Verteilung, die nicht das Produkt zweier S. V.en zu sein braucht und auch noch von  $n$  abhängen könnte.

2. Vererbung von  $m$  gekoppelten Merkmalen. Betrachten wir simultane Charaktere, wie Farbe der Blüte, Länge des Stengels, usw. Für jeden Charakter sind  $r$  Allele möglich (es ist unnötig  $m$  Zahlen  $r_1, \dots, r_m$  einzuführen, da man im Falle verschiedener Allele-Anzahlen mit  $r$  die größte der  $r_i$  bezeichnen und entsprechende W.en gleich Null annehmen kann). Ein Genotyp ist dann mit  $(x, y)$  zu bezeichnen, wobei die „Vektoren“  $x, y$ , beziehungsweise die Komponenten  $x_1, \dots, x_m$  und  $y_1, \dots, y_m$  haben ( $x_i = 1, \dots, r, y_i = 1, \dots, r, (i = 1, \dots, m)$ ), und  $x$  das mütterliche,  $y$  das väterliche Erbe bezeichnet. Wieder setzen wir wie in Abn. 1  $(x, y) = (y, x)$ , oder ausführlicher  $(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_m)$  voraus. Hier ist es wesentlich durch den Strichpunkt mütterliches und väterliches Erbe zu trennen, d.h. den Genotyp durch zwei  $m$ -dimensionale Vektoren zu geben und nicht durch  $m$  Paare von Ziffern. D. h. es ist etwa (1,2; 5,7) von (1,7; 5,2) zu unterscheiden, obgleich beide bez. des ersten Merkmals durch das Paar (1,5), bez. des zweiten durch (2,7) gekennzeichnet sind. Es gibt dann  $N_1 = \frac{1}{2} \cdot r^m (r^m + 1)$  verschiedene Genotypen, z.B. für  $r = m = 2$  ist  $N_1 = 10$ , während es  $N_2 = [r(r+1)/2]^m$  Zahlenpaare gibt, für  $r = m = 2, N_2 = 9$ . Diese zweite Auffassung reicht aus, wenn man Mendels „zweites Gesetz“ annimmt, demgemäß die  $m$  Genpaare voneinander unabhängig sind. Dies aber ist eine nach dem heutigen Stand der Beobachtungen zu enge Auffassung. Die Beschreibung des Erbvorganges ist nun die folgende: Im Fortpflanzungsvorgang wird ein Gamet gebildet, der bez. jedes der  $m$  Faktoren ein Gen enthält, also etwa für  $m = 5: (x_1, y_2, y_3, x_4, x_5)$ . Dabei ist es, wie bemerkt, nicht mehr die geltende Theorie, gleich Mendel anzunehmen, daß jeder dieser  $2^m$  Kombinationen die gleiche W. nämlich  $2^{-m}$  zukommt, sondern es ist der besonders von Morgan beobachteten, sog. Koppelung (linkage) Rechnung zu tragen. Das Grundphänomen der Koppelung ist, daß eine Tendenz besteht, die Weitergabe der von den Eltern übernommenen Genverbindungen zu bevorzugen, also ein Einfluß der Großeltern auf den Enkel. Z.B. im Fall  $m = 2$  wird ein Wesen vom Typ  $(x_1, x_2; y_1, y_2)$  die Gameten  $(x_1, x_2)$  und  $(y_1, y_2)$  je mit einer W.  $q = (1-c)/2$  abgeben, während für Abgabe der beiden andern möglichen Gameten je die W.  $p = c/2$  besteht. Man nennt  $c$ , das gewöhnlich  $< \frac{1}{2}$  ist, den crossover-Wert (auch recombination value, oder Austausch W.). Dies ist die erste der in der Einleitung angedeuteten Situationen, wo die Laplaceschen  $1/4, 1/4, 1/4, 1/4$ , die den vier Möglichkeiten der Gametenbildung entsprechen, nicht ausreichen. Das gilt erst recht von der allgemeinen Verteilung, der wir uns jetzt zuwenden.

Man sieht leicht, daß man zwar für  $m = 3$  durch Angabe der drei crossover-Werte  $c_{12}, c_{23}, c_{13}$  ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) die Segregation voll beschreiben kann, daß aber für  $m \geq 4$  eine komplette S. V., die wir hier Koppelungs- oder auch Austausch-Verteilung (A. V.) (linkage distribution) nennen wollen, eingeführt werden muß (s. G. (a)). Bezeichnet  $S$  die Menge der  $m$  Zahlen  $1, 2, \dots, m$ ,  $A$  eine Untermenge von  $S$  (die auch gleich 0 oder  $S$  sein kann),  $A' = S - A$ , dann sei  $l(A)$  die W. eines Gameten, dessen mütterliche Gene von  $A$ , dessen väterliche von  $A'$  stammen, und

$$l(A) = l(A'), \quad \sum_A l(A) = 1 \quad (2.1).$$

Fügt man noch die Beziehung (1.4) hinzu, wobei  $x$  und  $y$  jetzt natürlich Vektoren sind, so ist die Vererbung schematisch folgendermaßen beschrieben: a) Ein Genotyp ist charakterisiert durch zwei  $m$ -dimensionale Vektoren  $x$  und  $y$ ; erstes (zweites) Argument bezeichnet mütterliches (väterliches) Erbe. b) Jeder abgegebene Gamet ist von der Form  $(z_1, \dots, z_m)$ , wobei

jedes  $z_i$  gleich  $x_i$  oder  $y_i$  ist. c) Die jeweilige Auswahl unter den  $2^m$  möglichen Gameten erfolgt nach der oben erklärten A.V. d) Der neue Genotyp in der folgenden Generation entsteht durch Multiplikation entsprechender Gameten-Wen, gemäß (1.4). — Dabei ist angenommen, daß für beide Geschlechter die gleichen Regeln und Verteilungen gelten. Es ist klar, daß in unserer A.V. alle beobachteten Spezialfälle, wie „Unabhängigkeit“, alle  $l_A$  gleich; „vollständige Koppelung“,  $l_S = l_0 = 1/2$ , alle andern gleich Null; und weitere Fälle, die wir noch besprechen werden, enthalten sind.

Ehe wir weitergehen, müssen wir an den Begriff der Marginalverteilung erinnern: Aus einer  $m$ -dimensionalen (arithmetischen) Verteilung  $p(z_1, z_2, \dots, z_m)$  leiten wir eine Marginalverteilung von niedrigerer Ordnung als  $m$  ab, etwa die Marginalverteilung 3. Ordnung  $p_{234}(z_2 z_3 z_4)$  durch  $(m-3)$ -fache Summation  $\sum_{z_1} \sum_{z_2} \dots \sum_{z_m} p(z_1, z_2, \dots, z_m)$ .

Für  $p_{234}(z_2 z_3 z_4)$  schreiben wir kürzer  $p_A(z_A)$ , oder auch  $p_A(z)$ , wobei  $A$  die Teilmenge  $(2, 3, 4)$  bezeichnet.

In derselben Weise ist die Marginalverteilung unserer A.V. zu verstehen: Es bedeutet etwa  $1_A(A_1) = 1_A(A_2)$ , wo  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A \leq S$  die Wahrscheinlichkeit, daß die mütterliche Gene, die  $A_1$ , die väterlichen, die  $A_2$  zugehören, abgegeben werden, während für die übrigen Gene jede Möglichkeit besteht. Man mag im übrigen die A.V. als eine  $m$ -dimensionale Verteilung mit Argumenten  $\varepsilon_i$  auffassen, wobei  $\varepsilon_i = 1$  (oder gleich Null) wenn das  $i$ te abgegebene Gen ein mütterliches (väterliches) ist. Es ist nun auch klar, daß  $c_{ik} = c_{ki}$  eine durch  $(m-2)$ -fache Summation aus der A.V. entstehende Marginalverteilung ist, d.h. es ist die W. dafür, daß das mütterliche Gen  $i$  und das väterliche  $k$  abgegeben wird, oder umgekehrt.

Wir wollen nun eine Rekursion für  $w^{(n)}(x; y)$  oder, was bei Panmixie auf dasselbe herauskommt für  $p^{(n)}(x)$  angeben und müssen hier aus Platzmangel die Resultate ohne die, im übrigen sehr durchsichtigen, Beweise mitteilen. Zunächst gilt als Analogon von (1.3):

$$p^{(n)}(z) = \sum_A l(A) w^{(n)}(x; y) \dots \dots \dots (2.2),$$

dabei ist  $A$  eine beliebige Untermenge von  $S$ , und  $x$  und  $y$  so, daß

$$y_i = z_i \text{ wenn } i \in A, \quad x_i = z_i \text{ wenn } i \in A' \dots \dots \dots (2.2').$$

Die entscheidende Rekursionsformel ist:

$$p^{(n+1)}(z) = \sum_A l(A) p_A(z_A) p_{A'}(z_{A'}) \dots \dots \dots (2.3)$$

wobei die Summe über alle Teilmengen von  $S$  zu erstrecken ist. Beachtet man die Symmetrie  $l(A) = l(A')$  so gibt (2.3), etwa für  $m=3$ :

$$p^{(n+1)}(z_1, z_2, z_3) = 2[l(0)p^{(n)}(z_1, z_2, z_3) + l(1)p_1(z_1)p_{23}^{(n)}(z_2 z_3) + l(2)p_2(z_2)p_{13}^{(n)}(z_1 z_3) + l(3)p_3(z_3)p_{12}^{(n)}(z_1 z_2)] \quad (2.3')$$

oder für  $m=4$  in unmittelbar verständlicher Schreibweise:

$$p^{(n+1)}(z_1 \dots z_4) = 2[l(0)p^{(n)}(z_1 \dots z_4) + (l(1)p(z_1)p_{234}^{(n)}(z_2 z_3 z_4) + \dots + l(12)p_{12}^{(n)}p_{34}^{(n)} + l(13)p_{13}^{(n)}p_{24}^{(n)} + l(14)p_{14}^{(n)}p_{23}^{(n)})] \quad (2.3'').$$

Man sieht, daß es die Werte der A.V. sind, die diese Formeln so durchsichtig machen, indem sie die Zusammenfassung zu sinnvollen Gruppen nahelegen. Es ist klar, daß wir bei Durchführung der Rekursion (2.3) auch Rekursionsformeln für die Marginalverteilungen brauchen. Z.B. treten in (2.3'') auch  $p_{123}^{(n)}$  oder  $p_{12}^{(n)}$  auf. Es ist aber leicht zu sehen, daß dies kein neues Problem darstellt, sondern daß etwa die Rekursion für  $p_{123}^{(n)}$  einfach durch (2.3') geliefert wird.

Die Formeln (2.3) bilden ein System von Quadratischen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Das Ziel der Lösung oder Integration ist,  $p^{(n)}$  als Funktion von  $n$  und der Ausgangsverteilung  $p^{(0)} \equiv p$  auszudrücken. Für den Laplace-Mendelschen Spezialfall der Unabhängigkeit der Charaktere hat H. Tietze<sup>4)</sup> bereits vor 30 Jahren unser Problem behandelt und sowohl Rekursionsformeln wie auch Limesverteilung für  $n \rightarrow \infty$  angegeben. Hingegen stammt die elegante explizite Lösung der Rekursionsformel für diesen Fall von F. Bernstein<sup>5)</sup>. Die allgemeine Lösung bei beliebiger A.V. ist nicht einfach: Für  $m=2$  haben H. S. Jennings<sup>6)</sup> und auch R. B. Robbins die explizite Lösung gegeben. Für  $m=3$  ist die von mir (G. (b)) gegebene Lösung noch sehr einfach. Die allgemeine Lösung ist in G. (a) enthalten.

<sup>4)</sup> „Über das Schicksal gemischter Populationen nach den Mendelschen Vererbungsgesetzen.“ Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 362–393.

<sup>5)</sup> „Variations- und Erbliehkeitsstatistik“ in „Handbuch der Vererbungswissenschaft“, Bd. 1, S. 1–96.

<sup>6)</sup> (a) The numerical results of diverse systems of breedings with respect of two pairs of characters, etc. J. Genetics 1 (1916), p. 97–154.

(b) The numerical relations in the crossing over of the genes etc. J. Genetics 8 (1923), p. 393–457.

Was nun die Stabilität betrifft, sieht man leicht, daß jede der in (2.3) auftretenden Marginalverteilungen erster Ordnung gleich der entsprechenden in der Ausgangsgeneration ist, ebenso wie in (1.5).

$$p^{(n)}(z_i) = p^{(0)}(z_i) \equiv p(z_i), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4).$$

Aber schon für  $m \geq 2$  ist ein Gleichgewichtszustand bei endlichem  $n$  nur in dem trivialen Fall kompletter Koppelung vorhanden ( $l(S) - l(0) = 1/2$ , alle andern  $l$ -Werte gleich Null). In diesem Fall ist offenbar

$$p^{(n)}(z_1, \dots, z_m) = p^{(0)}(z_1, \dots, z_m), \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.5).$$

D. h. vollständig gekoppelte Gene verhalten sich wie ein einziges.

Betrachten wir nun den „Hauptfall“, daß alle crossover Werte von Null verschieden sind. Dann besteht der Grenzwertsatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(z_1 \dots z_m) = p(z_1) p(z_2) \dots p(z_m) \quad (2.6).$$

Im Gleichgewichtszustand, der erst für  $n \rightarrow \infty$  eintritt, herrscht Unabhängigkeit. (Für Tietzes Fall, wo jedes  $c_{ij} = \frac{1}{2}$ , ist unsere Voraussetzung natürlich erfüllt, und es gilt (2.6). Zwischen diesen beiden extremen Fällen, — „alle  $c_{ij}$  gleich Null“, „kein  $c_{ij}$  gleich Null“, — liegt die Möglichkeit von  $t \leq m$  Gruppen  $S_\rho$ , derart, daß innerhalb jedes  $S_\rho$  komplette Koppelung herrscht, d. h. alle betreffenden  $c_{ij}$  verschwinden, daß aber mindestens ein von Null verschiedener Crossover-Wert von jeder Gruppe zu jeder andern führt (dabei schließen wir auch den Fall der aus einem einzigen Element bestehenden „Gruppe“ ein). Es ist dann  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_t$ . Zunächst gilt dann für jede Gruppe

$$p_{S_\rho}^{(n)} = p_{S_\rho}^{(0)}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, t) \quad (2.7)$$

und für die Verteilung der  $m$  Charaktere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,2,\dots,m}^{(n)} = p_{S_1}^{(0)} p_{S_2}^{(0)} \dots p_{S_t}^{(0)} \quad (2.8).$$

Innerhalb jeder Gruppe kompletter Koppelung bleibt für alle Generationen die ursprüngliche Gametenverteilung erhalten. Die  $m$ -dimensionale Verteilung aller Gene konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzverteilung, in der die  $t$ -Gruppen unabhängig verteilt sind.

Eine triviale Verallgemeinerung würde darin bestehen, für männliche und weibliche Organismen verschiedene Ausgangsverteilungen  $w^{(0)}(x; y)$ , und  $v^{(0)}(x; y)$  anzunehmen; schon nach einer Generation von Panmixie gleicht sich dies aus. Hingegen ist es biologisch wichtig und nicht trivial (darauf bezieht sich der zweite Hinweis in der Einleitung) für die beiden Geschlechter verschiedener Austauschverteilungen zu betrachten (s. G. (d)), nämlich  $l_A$  und  $\bar{l}_A$  und dann ist auch die Annahme verschiedener Ausgangsverteilungen,  $w^{(0)}$ , und  $v^{(0)}$  für die Zygoten,  $p^{(0)}$  und  $q^{(0)}$  für die Gameten nicht trivial. Das Resultat ist, daß dann dauernd verschiedene Verteilungen  $p^{(n)}$ ,  $q^{(n)}$  auftreten; die Rekursionsformeln sind ähnlich wie bisher, doch nehmen  $r^{(n)} = \frac{1}{2}(p^{(n)} + q^{(n)})$  und  $L_A = \frac{1}{2}(l_A + \bar{l}_A)$  den Platz von  $p^{(n)}$  und  $l_A$  ein. Diese Verhältnisse sind allerdings für  $m \geq 4$  nicht mehr ganz so einfach. Man erhält jedoch für jedes  $m$  sehr einfache Grenzwertgesetze: Mit  $n \rightarrow \infty$  konvergieren  $p^{(n)}$  und  $q^{(n)}$  gegen dieselbe Grenzverteilung, die durch  $r^{(0)}(z_1, \dots, z_m)$  bestimmt ist. Wenn alle  $k_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (c_{ij} + \bar{c}_{ij}) \neq 0$ , so konvergieren beide gegen das Produkt der  $m$  Marginalverteilungen  $r_i^{(0)}(z_i)$  der einzelnen Gene ( $i = 1, \dots, m$ ), beziehungsweise im allgemeinen Fall gegen das Produkt der den oben definierten Gruppen  $S_1, \dots, S_t$  entsprechenden Ausgangs-Marginalverteilungen der  $r^{(0)}$ .

3. Mendelsche Genetik der Autopolyploide. Die Grundverteilungen. Wir haben soweit die Verallgemeinerung von Mendels ursprünglichen Ideen auf den Fall von  $m$  beliebig gekoppelten Charakteren untersucht. Eine zweite wichtige Verallgemeinerung in ganz anderer Richtung bezieht sich auf die sog. „polysomic“ (mehrwertige) Vererbung. Hier tritt auch, im Gegensatz zu der bisher ausschließlich betrachteten „Chromosom Segregation“ die sog. „Chromatid Segregation“ in den Vordergrund. Wie man leicht zeigen kann, kommen bei normalen „diploiden“ Organismen, gleich den bisher betrachteten, beide Arten der Segregation mathematisch auf das gleiche Problem hinaus.

Wir beginnen mit der Chromosomen Segregation für  $m = 1$ . Das wesentliche Kennzeichen eines Autopolyploids ist, daß ein Gamet bezüglich jedes Faktors nicht nur ein, sondern  $s \geq 1$  Gene besitzt, und der Zygote  $2s$  solche, von denen je  $s$  sein mütterliches, bez. väterliches Erbe darstellen; jedes Gen kann  $r$  Allele annehmen. Bei der Fortpflanzung gibt jedes Elter von seinen  $2s$  Genen  $s$  ab und die Auswahl dieser erfolgt nach einem — von  $n$  und vom Genotyp

des Elter unabhängigen — Zufallsgesetz. Ein Gamete wird also durch  $s$  Zahlen ( $z$ ), ein Zygote durch zwei Gruppen von je  $s$  Zahlen ( $x; y$ ) gegeben. Es entspricht den Beobachtungen anzunehmen, daß beim Gameten wie beim Zygoten den verschiedenen Permutationen der gleichen Allele derselbe Typus entspricht. Dementsprechend wird man z. B. für  $s=6$  statt  $(a_1 a_2 a_3 a_1 a_1 a_3)$  nun  $(a_1^3 a_2 a_3^2)$  schreiben. Man sieht, daß  $R = \binom{r+s-1}{s}$  Gameten in Betracht kommen und wenn man den Zygoten durch sein mütterliches und väterliches Erbe gibt, wobei  $(x; y) = (y; x)$ , so  $\frac{1}{2} \cdot R(R+1)$  Zygoten. Bezeichnen wir nun, in etwas ausführlicherer Schreibweise mit  $w^{(n)}(a_1^{x_1} \dots a_r^{x_r}; a_1^{y_1} \dots a_r^{y_r})$  wobei  $x_1 + \dots + x_r = s$ ,  $y_1 + \dots + y_r = s$  die  $W$ . eines individuellen Typus, so erscheint gemäß den möglichen Permutationen so ein Typus  $\frac{s!}{x_1! \dots x_r!} \cdot \frac{s!}{y_1! \dots y_r!}$ -mal und es ist, mit einleuchtender Abkürzung

$$\sum_x \sum_y \binom{s}{x_1, \dots, x_r} \cdot \binom{s}{y_1, \dots, y_r} w^{(n)}(x; y) = 1 \quad \dots \quad (3.1).$$

Analoges gilt für die Gametenverteilung  $p^{(n)}(a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r})$  und es ist  $\binom{s}{z_1, \dots, z_r} p^{(n)}(a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r})$  die  $W$ , daß ein Gamete den Typus  $a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r}$  hat und

$$\sum_z \binom{s}{z_1, \dots, z_r} p^{(n)}(z) = 1 \quad \dots \quad (3.2).$$

Nun die S.V. Es können  $s$  Zahlen aus  $2s$  solchen auf  $S = \binom{2s}{s}$  Weisen ausgewählt werden und es wurden, als einfachste Annahme diese  $S$  Fälle stets als gleich möglich angesehen, insbesondere von Haldane<sup>7)</sup>, an dessen wichtige Arbeit unsere Ausführungen (G. (c)) anknüpfen; dies wird als Zufalls-Chromosom-Segregation bezeichnet. Doch haben Beobachtungen Unstimmigkeiten mit der Theorie gezeigt und aus diesem Grund, sowie um größerer Allgemeinheit und — in letzter Linie — Einfachheit willen setzen wir unsere S.V. nicht von Anfang an als Gleichverteilung voraus. Studium von Beobachtungsergebnissen führt zu der Vermutung, daß die Proportion mütterlicher und väterlicher Gene im Gameten eine Rolle spielen mag. Wir führen also  $l_\alpha = \binom{s}{\alpha} \lambda_\alpha = l_{s-\alpha}$  ein, als die  $W$ . dafür, daß eine bestimmte Gruppe von  $\alpha$  mütterlichen Genen abgegeben wird. Da eine solche mit irgend  $(s-\alpha)$  väterlichen Genen kombiniert sein mag, so ist

$$\sum_{\alpha=0}^s \binom{s}{\alpha} l_\alpha = \sum_{\alpha=0}^s \left[ \binom{s}{\alpha} \right]^2 \lambda_\alpha = 1 \quad \dots \quad (3.3).$$

Für  $\lambda_\alpha = 1/S$  ergibt sich Müllers und Haldanes gleichförmige S.V. Auf diese Weise sind, wenn  $s=2\mu$  oder  $s=2\mu+1$ ,  $\mu$  verfügbare Parameter eingeführt. Es sei noch folgendes bemerkt: Obgleich wir mit Absicht alle Definitionen und Formeln in möglichster Ähnlichkeit zu denen des Abn. 2 gegeben haben, ist doch die Situation hier eine ganz andere als dort:

Dort gab es  $r^m$  verschiedene Gameten, hier  $R = \binom{r+s-1}{s}$ . In der Segregation der Autopolyploide,  $s > 1$ ,  $m=1$  kann jede Gruppe von  $s$  Werten abgegeben werden, während beim früheren Problem,  $s=1$ ,  $m > 1$ , ein „Vektor“ abgegeben werden muß, d.h. jede der  $m$  Komponenten muß einmal vertreten sein.

#### 4. Fortsetzung: Rekursionsformeln. Grenzwertsätze

Wir suchen wieder eine Rekursionsformel für  $p^{(n)}$ . Es sind die Marginalverteilungen zu definieren. Es bezeichne (in irgend einer Generation)  $p(a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_r^{x_r})$  die Marginal- $W$ . der Ordnung  $\alpha$ , für die Kombination  $(a_1^{x_1} \dots a_r^{x_r})$ ,  $(x_1 + \dots + x_r = \alpha, \alpha \leq s)$ , während die übrigen  $(s-\alpha)$  Gene beliebig sind. Dies ist z.B. die  $W$ . dafür, daß die ersten  $x_1$ -Plätze mit dem Allel  $a_1$ , die nächsten  $x_2$  mit  $a_2$ , ... die letzten der  $\alpha$  Plätze mit  $a_r$  besetzt sind. Die gleiche  $W$ . besteht natürlich für andere  $\alpha$  Plätze, wenn die  $a_i$  und  $x_i$  dieselben sind; aus diesem Grund können Indizes in den Marginalverteilungen weggelassen werden. So ist etwa für  $s=5$ ,  $r=2$ :

$$p(a_1 a_2) = p(a_1^4 a_2) + 3 p(a_1^3 a_2^2) + 3 p(a_1^2 a_2^3) + p(a_1 a_2^4)$$

die  $W$ . dafür, daß das erste Gen  $a_1$ , das zweite  $a_2$  ist, während die andern drei beliebig sind und es gilt (wenn wir dies eine Mal Indizes schreiben)

$$p_{12}(a_1 a_2) = p_{1234}(a_1^3 a_2) + 2 p_{1234}(a_1^2 a_2^2) + p_{1234}(a_1 a_2^3) = p_{123}(a_1^2 a_2) + p_{123}(a_1 a_2^2),$$

<sup>7)</sup> „Theoretical Genetics of Autopolyploids“. J. Genetics 22 (1930), p. 359–372.

Unsere allgemeine Rekursionsformel ergibt sich in der Form:

$$p^{(n+1)}(a_1^{z_1} a_2^{z_2} \dots a_r^{z_r}) = \sum_{\alpha=0}^s l_{\alpha} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_r} \binom{z_1}{x_1} \binom{z_2}{x_2} \dots \binom{z_r}{x_r} p^{(n)}(a_1^{x_1} \dots a_r^{x_r}) p^{(n)}(a_1^{z_1-x_1} \dots a_r^{z_r-x_r}) \quad (4.1)$$

mit

$$\sum_{i=1}^r z_i = s, \quad \sum_{i=1}^r x_i = \alpha, \quad 0 \leq x_i \leq z_i.$$

Die aus sehr vielen Gliedern bestehende rechte Seite von (4.1) ist so einfach, dank den als Separatoren auftretenden, sinngemäße Zusammenfassungen anregenden Werten von  $l_{\alpha}$ . Wir haben etwa für  $s=4$ ,  $r=4$

$$p^{(n+1)}(a_1 a_2 a_3 a_4) = 2\{l_0 p^{(n)}(a_1 a_2 a_3 a_4) + l_1 [p(a_1) p^{(n)}(a_2 a_3 a_4) + \dots + \dots] + l_2 [p^{(n)}(a_1 a_2) p^{(n)}(a_3 a_4) + \dots + \dots]\}.$$

Da die Rekursionsformeln, in denen die Werte  $l_{\alpha}$  eine so entscheidende Rolle spielen, biologische Tatsachen formulieren, mag es auch aus diesem Grunde erlaubt sein rückzuschließen, daß unsere Segregations Wahrscheinlichkeiten nicht nur mathematisch, sondern auch biologisch sinnvoll sind.

Zur Anwendung von (4.1) von Generation zu Generation brauchen wir noch Rekursionsformeln für die auftretenden Marginal W.en. Diese sind hier nicht trivial — wie in Abn. 2 —; trotzdem wollen wir in dieser Übersicht nicht darauf eingehen. Die Rekursionsformeln bilden ein System von quadratischen Differenzengleichungen, deren konstante Koeffizienten die Werte  $l_{\alpha}$  sind. Ein Verfahren zur Lösung, für jedes  $s$ , wurde angegeben (G. (c)), ebenso, für jedes  $s$ , die Konvergenzgeschwindigkeit gegen den Gleichgewichtszustand. Haldane hat die Rekursionsformel und explizite Lösung für  $s=2$  gegeben und die Konvergenzgeschwindigkeit für  $s=3$  festgestellt.

Wenden wir uns nun der Frage stabiler Verteilungen zu. Zunächst, genau wie beim Diploid, bleibt die Gameten-W. jedes einzelnen Gens dauernd ungeändert

$$p^{(n)}(a_i) = p^{(0)}(a_i), \quad (i=1, \dots, r), \quad (n=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (4.2).$$

Ferner: Wenn komplette Koppelung der väterlichen und somit der mütterlichen Gene vorliegt, d. h.  $l_0 = l_s = \frac{1}{2}$ , so ist wieder

$$p^{(n)}(a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r}) = p^{(0)}(a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r}) \dots \dots \dots (4.3).$$

Ist aber, im „allgemeinen Fall“  $l_0 < \frac{1}{2}$ , so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(a_1^{z_1} \dots a_r^{z_r}) = (p^{(0)}(a_1))^{z_1} \dots (p^{(0)}(a_r))^{z_r} \dots \dots \dots (4.4).$$

Im Gleichgewichtszustand sind die einzelnen Allele unabhängig verteilt. Haldane hat, für  $\lambda_{\alpha} = 1/S$ , bewiesen, daß die Verteilung rechts in (4.4) stabil ist, d. h. sich unter dieser Segregation reproduziert; doch diskutiert er nicht — wann so eine Verteilung angenommen wird. — Es ist in der Tat von vorneherein plausibel, daß bei Panmixie ein Gleichgewicht, wenn überhaupt vorhanden, nur in unabhängiger Anordnung der Allele bestehen kann.

5. Weitere Fragestellungen für Autopolyploids. Chromosom Segregation ist ein Spezialfall von Chromatid Segregation, die eigentlich heute als zutreffend angesehen wird<sup>8)</sup>. Immerhin stellt erstere, wie wir sehen werden, eine Annäherung an die letztere weit kompliziertere dar. Wir wollen nun diese neue Form der Segregation erklären. Für  $m=1$  besteht ein Gamet aus  $s>1$  Chromosomen. Der Zygote besitzt zwei Gruppen von je  $s$  Chromosomen, jedoch  $4s$  „Chromatiden“, je zwei davon zusammengehörig, d. h. zum gleichen Chromosom gehörig („sister chromatids“). Bei der Gametenbildung werden  $s$  der  $4s$  Chromatide weitergegeben, was auf  $\bar{S} = \binom{4s}{s}$  Arten geschehen kann. Eine solche Gruppe kann von  $s-\varrho$  verschiedenen Chromosomen stammen, wobei für  $s=2\mu$ , oder  $s=2\mu+1$  für  $\varrho$  die Werte  $0, 1, \dots, \mu$  in Betracht kommen; ein solcher Gamet enthält dann  $\varrho$  Paare „zusammengehöriger“ Chromatide. Nennen wir der Kürze halber einen Gameten „normal“, wenn  $\varrho=0$ , so gibt es  $S_1 = 2^s \cdot \binom{2s}{s}$  normale, und  $\bar{S} - S_1$  solche, die mindestens ein Paar zusammengehöriger Chromatide aufweisen. Wenn und nur wenn die W. aller nicht normalen Gameten gleich Null ist, reduziert sich Chromatid- auf Chromosom-Segregation.

<sup>8)</sup> Es wurde schon früher bemerkt, daß sich zeigen läßt, daß für Diploide,  $m = \text{beliebig}$ ,  $s=1$ , beide auf dasselbe herauskommen.

R. A. Fisher und K. Mather<sup>9)</sup> definieren eine S. V., die gemäß den  $(\mu + 1)$  möglichen Werten von  $\varrho$  ebensoviele Parameter enthält.

In unserer Definition der S. V. (s. G. (f)) tragen wir außerdem, aus denselben Gründen wie bisher, der Proportion mütterlicher und väterlicher Gene im Gameten Rechnung. Eine solche S. V. enthält die allgemeine Chromosom-Segregations-Verteilung der zwei vorigen Abschnitte als Spezialfall, sowie eine von Haldane (s. Fußnote 7) angenommene Gleichverteilung der  $\bar{S}$  Möglichkeiten (Zufalls-Chromatid-Segregation). Wir bezeichnen also mit  $u_\alpha^0$  die W. daß eine bestimmte Gruppe von  $\alpha$  mütterlichen und  $s - \alpha$  väterlichen Genen weitergegeben werde, wobei der entstehende Gamet genau  $\varrho$  Paare zusammengehöriger Chromatide enthält. ( $\varrho = 0, 1, \dots, \mu$ )<sup>10)</sup>. Es seien alle  $u_\alpha^0$  für dasselbe  $\alpha$  und  $\varrho$  einander gleich, und außerdem  $u_\alpha^0 = u_{s-\alpha}^0$ . Setzen wir  $u_\alpha^0 = u_\alpha$  so hat man z. B. für  $s = 2$  und  $s = 3$ :

$$\left. \begin{aligned} s = 2: & \quad 4(u_0 + 4u_1 + u_2) + 2(u'_0 + u'_2) = 4 \cdot 2(u_0 + 2u_1) + 4u'_0 = 1, \\ s = 3: & \quad 16(u_0 + 9u_1) + 12(2u'_0 + 3u'_1) = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots (5.1).$$

Es ergeben sich nun hier Rekursionsformeln von ganz anderer Art als vorher. Man hat z. B. für  $s = 3$  für einen Homozygoten:

$$p^{(n+1)}(a_1^3) = 16 u_0 p^{(n)}(a_1^3) + 144 u_1 p^{(n)}(a_1^2) p(a_1) + 24 u'_0 p^{(n)}(a_1^2) + 36 u'_1 [p(a_1)]^2 \dots (5.2)$$

und ähnliche Formeln für die Typen  $(a_1^2 a_2)$  oder  $(a_1 a_2 a_3)$ . Ihre Struktur kann wohl analysiert und verstanden werden; auch Integration der Rekursionsformeln, für  $s=2$  und  $s=3$  wurde durchgeführt und schließlich das Grenzverhalten für  $n \rightarrow \infty$  festgestellt. Z. B. die limes-Formel für den Fall der Gleichverteilung (alle  $\bar{S}$  Wahrscheinlichkeiten in der S. V. einander gleich):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(a_i^2 a_\kappa) = \frac{72}{7 \cdot 17} p(a_i^2) p(a_\kappa) + \frac{15}{7 \cdot 17} p(a_i) p(a_\kappa) \dots (5.3)$$

zeigt eine von den früher gefundenen, ganz verschiedene Struktur. Eingehendere Diskussion würde uns zu weit führen.

Schließlich habe ich (G. (e)) für Autopolyploide die allgemeine Aufgabe der Vererbung von  $m$  gekoppelten Charakteren,  $2s$  Chromosome,  $r$  Allele, unter Chromosom Segregation durchgeführt. Dabei müssen sich einerseits, für  $s=1$ , die Problemstellungen und Resultate von Abn. 2 andererseits für  $m=1$  die von Abn. 3 und 4 ergeben. Hier lag eine interessante Arbeit von D. De Winton und Haldane<sup>11)</sup> vor, die für Tetraploids (d. h.  $s=2$ ) der primula sinensis für den Fall  $m=2$  eine durch Beobachtungen nahegelegte Koppelungstheorie durchführen. Unser Gedankengang ist ähnlich wie bisher: Zunächst ist ein Gamete natürlich durch Angabe von  $m$  loci und  $s$  aus den  $r$  möglichen Allelen gewählte Gene gegeben (das wären ohne alle „Symmetriebeziehungen“  $r^s m$  verschiedene Typen). Es ist nun ein Unterschied, ob man bloß die  $m$ -Gruppen von  $s$  beliebig angeordneten Allelen gibt (zu jedem locus  $s$  Chromosome) oder  $s$  Gruppen von je  $m$  „Vektorkomponenten“ (zu jedem Chromosom die  $m$  Charaktere). Die in der zweiten Auffassung zu unterscheidenden Gameten  $(a_1 b_1, a_2 b_2) \neq (a_1 b_2, a_2 b_1)$  sind in der ersten, beide durch  $(a_1 a_2, b_1 b_2)$  gegeben.

Im ersten Fall sind  $R = \left[ \binom{r+s-1}{s} \right]^m$ , im zweiten Fall  $R_1 = \binom{r^m+s-1}{s}$  Gametentypen. Beim Zygoten kommt außerdem noch die von uns, hier wie auch früher, bejahte Frage dazu, ob mütterliches und väterliches Erbgut aufzuzeigen ist oder nicht. Unsere S. V., die ja stets den Angelpunkt der Theorie bildet, ist auf der ersten Auffassung basiert (was mir heute nicht mehr als die unbedingt richtige Wahl erscheint<sup>12)</sup>). Es sei

$$\left[ \binom{s}{\varepsilon_1} \right]^2 \dots \left[ \binom{s}{\varepsilon_m} \right]^2 \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \binom{s}{\varepsilon_1} \dots \binom{s}{\varepsilon_m} l(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \quad (\varepsilon_i = 0, \dots, s) \dots (5.4)$$

die W. dafür, daß innerhalb der von einem Elter abgegebenen Gruppe von  $s$  zum  $i$ ten locus gehörenden Werten sich  $\varepsilon_i$  „mütterliche“ und  $s - \varepsilon_i$  „väterliche“ befinden, wobei  $i=1, \dots, m$ ,  $\varepsilon_i=0, 1, \dots, s$ . Es ist klar, daß sich diese Verteilung für  $s=1$ , resp. für  $m=1$  auf die früher eingeführten S. V.en reduziert.

<sup>9)</sup> „The inheritance of style length in *Lythrum Salicaria*“. Ann. Eugenics 12 (1943), p. 1—23. Siehe auch weiter Fisher: Ann. Eugenics 11 (1941), p. 31—39 und 12 (1944), p. 169—171.

<sup>10)</sup> Ob die Berücksichtigung der Proportion mütterlicher und väterlicher Anteile biologisch gerechtfertigt ist, kann nur durch Beobachtung entschieden werden. Wenn nicht, so kann man, nachdem die eingeführten Parameter ihre mathematische Schuldigkeit getan haben, sie leicht beseitigen, indem man bei festem  $\varrho$  alle  $u_\alpha^0$  für verschiedene  $\alpha$  einander gleichsetzt, was die obige Fisher Mathersche Auffassung ergibt.

<sup>11)</sup> „Linkage in the tetraploid *primula sinensis*.“ J. Genetics 24 (1931), p. 1—44.

<sup>12)</sup> Sie enthält De Winton und Haldanes für  $s=m=r=2$  definierte S. V. nicht als Spezialfall.

Wir haben sodann die Marginalverteilungen für die Gametenverteilung, sowie für die S. V. zu erklären und gewinnen Rekursionsformeln für die Gametenverteilung und ihre Marginalverteilungen. Die Ergebnisse sind außerordentlich durchsichtig. Wir betrachten als einfaches Beispiel den Fall, daß nur  $m$  verschiedene Allele (je eines per locus) auftreten. Dann ist

$$p^{(n+1)}(A_1^s \dots A_m^s) = \sum_{\varepsilon_1=0}^s \dots \sum_{\varepsilon_m=0}^s l(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m) \cdot \binom{s}{\varepsilon_1} \dots \binom{s}{\varepsilon_m} p^{(n)}(A_1^{\varepsilon_1} \dots A_m^{\varepsilon_m}) p^{(n)}(A_1^{s-\varepsilon_1} \dots A_m^{s-\varepsilon_m}) \quad (5.5).$$

Die Interpretation ist einfach:  $l(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m) \binom{s}{\varepsilon_1} \dots \binom{s}{\varepsilon_m}$  ist die W., daß bez. des  $i^{\text{ten}}$  locus  $\varepsilon_i$  mütterliche,  $s - \varepsilon_i$  väterliche Gene abgegeben werden ( $p^{(n)}(A_1^{\varepsilon_1} \dots A_m^{\varepsilon_m})$  ist die (marginale) W. eines mütterlichen Gameten mit diesen Genen, und analog für  $p^{(n)}(A_1^{s-\varepsilon_1} \dots A_m^{s-\varepsilon_m})$ . Unter Panmixie gibt die Summe dieser Produkte die gewünschte W. Die Einfachheit, die sich hier, bei allgemeinem  $r, m, s$  noch findet, geht bei Chromatid Segregation verloren.

Wir geben schließlich, zum Fall beliebiger Allele zurückkehrend, den „Hauptfall“ des Grenzwertsatzes an. Ähnlich wie in Abn. 4 kommt es hier auf  $l_i(0)$  an, d. h. auf die aus  $l(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m)$  abgeleitete Marginalverteilung erster Ordnung. Wenn  $l_i(0) = \frac{1}{2}$ , oder  $c_i = 1 - 2l_i(0) = 0$ , so besteht bez. des  $i^{\text{ten}}$  locus complete Koppelung (und die betreffende Marginalverteilung bleibt unverändert erhalten); andernfalls gilt: Für allgemeines  $m, r, s$  konvergiert die Verteilung der Gameten gegen das Produkt der  $ms$  Ausgangsverteilungen der einzelnen Gene, wenn und nur wenn die  $m$  W.  $c_i$  positiv sind. Das Resultat ist von allen in die Segregations-Verteilung eingehenden Parametern unabhängig.

Wir haben hier eine Gruppe von Problemen aus dem Gebiet der Populationsgenetik behandelt, die sich auf Basis der Mendelschen Theorie, unter Benutzung eines rationellen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, mathematisch beschreiben lassen. Natürlich sind die eingeführten Begriffe und Hypothesen nur als mathematische Modelle der Wirklichkeit zu betrachten, und zwar als „Rahmenmodelle“, derart daß man durch geeignete Verfügung über die vorhandenen Parameter mehr konkrete, spezifischen Situationen angepaßte Darstellungen erhält. Andererseits mag es erwähnenswert scheinen, daß manche Resultate unabhängig von allen Parameterwerten bestehen. — Zwischen der Mathematik und einem stets wachsenden Kreis von Wissenschaften besteht das Verhältnis gegenseitiger Anregung, Hilfe und Bereicherung. Es ist hier auf einem beschränkten (doch erweiterungsfähigen) Gebiet der Versuch gemacht, die mathematischen Werkzeuge der Abstraktion und Verallgemeinerung in den Dienst unseres Strebens nach immer besserem Verstehen zu stellen.

#### Verzeichnis der referierten Arbeiten des Verfassers

- a) „On the probability theory of linkage in Mendelian heredity.“ *Ann. Math. Statistics* 15 (1944), p. 27—55.
- b) „Further remarks on linkage in Mendelian heredity.“ *Ibidem* 16 (1945), p. 390—398.
- c) „Contribution to the heredity theory of multivalents.“ *J. Math. Physics* 26 (1948), p. 246—278.
- d) „On the mathematics of random mating in case of different recombination values for males and females.“ *J. Genetics* 33 (1948), p. 548—564.
- e) „Contribution to the linkage theory of autopolyploids.“ *Bull. Math. Biophysics* 11 (1949), I, p. 59—82; II, p. 197—219.
- f) „Chromatid Segregation of tetraploids and hexaploids.“ *J. Genetics* 34 (1949), p. 665—684.
- g) „On some mathematical problems arising in the development of Mendelian genetics.“ *J. Amer. Statist. Assoc.* 44 (1949), p. 526—547.

## Über die Theorie der dünnen, schwach gebogenen Platten

Herrn R. von Mises zum 70. Geburtstag

Von Georg Hamel in Landshut

Die verdienstvolle Arbeit von Herrn Manfred Schäfer in dieser Zeitschrift (Bd. 32, Heft 6), die uns mit den grundlegenden Arbeiten von Herrn Erich Reissner über eine verfeinerte Theorie bekannt macht, veranlaßt mich, einiges Grundsätzliche zur Theorie der dünnen Platten zu sagen.

Beide Theorien, die klassische von Kirchhoff sowohl als auch die verfeinerte von Reissner enthalten das Unbefriedigende, daß außer genauen Voraussetzungen auch Vernachlässigungen gemacht werden, bedingt durch den Übergang vom Raum zur Fläche, deren Tragweite und Berechtigung schwer zu übersehen ist, z. B. das Fortlassen einer ganzen

Gleichung (5c bei Herrn Schäfer). In der klassischen Theorie ist die unangenehme Folge wohl bekannt: man kann nur zwei unabhängige Randbedingungen befriedigen, während drei bestehen.

Dieser Übelstand wird von der verfeinerten Theorie überwunden. Aber der erreichte Grad der Annäherung erscheint noch prekärer. Man beachte nur, daß in der Gleichung (II), aber auch schon in den Gleichungen (13d) u. (13e) des Herrn Schäfer ein kleiner Parameter bei den höchsten Ableitungen steht, was bekanntlich für eine allgemeine Theorie höchst mißlich ist.

Demgegenüber möchte ich darauf aufmerksam machen, daß es eine in sich geschlossene Theorie der dünnen Platten gibt, die rein zweidimensional arbeitet und auf Grund präziser Voraussetzungen völlig streng vorgeht. Sie ähnelt zwar in den Ergebnissen der klassischen Theorie, vermeidet aber die genannte Schwierigkeit; sie kann mühelos ohne „künstliche Überbrückung“ drei Randbedingungen befriedigen.

Zu dieser Schwierigkeit möchte ich zunächst noch etwas sagen. Die Bedingungen (12d) und (12e) der klassischen Theorie, nämlich

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

dürfen nicht als Folgerungen der dynamischen Gleichungen (5) angesehen werden, sondern als Folgerungen der Voraussetzung, daß die Normalen Normalen bleiben. Sie sind also kinematischer Natur. Es wäre demnach unbillig, für sie dynamische Randbedingungen wie (17a) zu fordern. Die Größen  $\omega_x$  und  $\omega_y$  kommen auch in der strengen Theorie gar nicht vor.

Diese strenge, rein zweidimensionale Theorie habe ich in Kap. III, §4 meiner Theoretischen Mechanik dargestellt. Eine erste Form, die in den Abh. der Berl. Akad. d. Wiss. veröffentlicht wurde, leidet an einem Vorurteil, das mit dem Kernpunkt zusammenhängt, den ich gleich erwähnen werde. Ich bitte, diese Abh. nicht zu Rate ziehen zu wollen.

Da der §4 des Buches sehr umfangreich, sehr formelreich und doch noch sehr knapp ist, gestatte man mir, ihn auszugsweise hier hinzuschreiben, wobei ich einige Ergänzungen hinzufügen werde, die ich im Buche dem Fleiße des Lesers überlassen habe. Ich werde allerdings die Beweise fortlassen, diese muß man im Buche nachlesen.

#### Zusammenstellung der Ergebnisse:

In der klassischen Theorie gelten  
die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4b)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (4c)$$

in der exakten dagegen

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial x} - Q_y = 0.$$

Hier sehen wir gleich den Kern des Unterschiedes: es gibt keinen Grund  $T_x + T_y = 0$  anzunehmen. (In meiner ersten Abh. war ich hier selber noch befangen.)  $T_x + T_y \neq 0$  zu beachten, ist keine willkürliche Annahme, sondern exakte Folgerung aus der klassischen Lagrange'schen Mechanik.  $T_x$  und  $T_y$  sind die Torsionsmomente in den Schnitten  $x = \text{const}$  bzw.  $y = \text{const}$ .

In der exakten Theorie gibt es wohl eine wesensverwandte Beziehung statt der nichtgeltenden. Für beliebige Schalen heißt sie

$$S_\alpha + S_\beta - \frac{F}{\Delta} (Z_\alpha - Z_\beta) - \frac{D'}{\Delta} (M_\alpha - M_\beta) + C_{\alpha\alpha} T_\alpha + C_{\beta\beta} T_\beta = 0$$

( $\alpha, \beta$  beliebige Koordinaten auf der Fläche,  $E, F, G$  und  $D, D', D''$  die sechs Fundamentalgrößen,

$$C_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\Delta^2} (D'F - DG); \quad C_{\beta\beta} = \frac{1}{\Delta^2} (D'F - D''E) \quad \Delta^2 = EG - F^2,$$

$S_\alpha, S_\beta$  die tangentialen Schubkräfte in den Schnitten,  $Z_\alpha, Z_\beta$  die Zugkräfte.)

In unserem Sonderfall wird daraus:

$$S_x + S_y + (M_x - M_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

also in erster Näherung  $S_x + S_y = 0$ , was uns nicht weiter berührt.

Wenn wir die Kirchhoffschen Annahmen zu Grunde legen (s. Schäfer, S.163 unten) und noch von der Querkontraktion absehen, was eine unwesentliche Vereinfachung bedeutet, bekommen wir die

drei Randbedingungen:

$$-\frac{16}{3} h^3 A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{dx dy}{ds ds} - \frac{8}{3} h^3 \left[ A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{8}{3} h^3 \left[ A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + M = 0 \quad \dots (A)$$

$A, B$ , sind Materialkonstante,  $M$  das Biegemoment am Rande,

$$-\frac{16}{3} h^3 B \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) - \frac{dT}{ds} \left\{ T + \frac{8}{3} h^3 A \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{dx dy}{ds ds} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \right] \right\} + Q = 0 \quad \dots (B)$$

$Q$  die Normalspannung am Rande,  $T$  das Torsionsmoment.

Diese Gleichung fehlt im Buche, sie wurde als Aufgabe gestellt. Gleichung (A) findet sich S.166 oben. Integriert man nach  $s$ , so ist die Eindeutigkeit von selbst gewahrt, wie man leicht nachrechnet. Endlich noch

$$\mu = \frac{1}{2} (T_x + T_y) = T + \frac{8}{3} h^3 A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{dx dy}{ds ds} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \right\} \quad (C).$$

Wie in der klassischen Theorie besteht auch hier eine Gleichung der Form

$$\text{const } \Delta \Delta w = p,$$

wo die Konstante  $\frac{16}{3} h^3 B$  ist. (Bei Bestimmung der Konstanten spielt die Vernachlässigung der Querkontraktion eine Rolle; bei einer rein zweidimensionalen Theorie wird man  $A, B$ , als Materialkonstante ansehen, deren Wahl zur Anpassung an die Erfahrung dient.)

Ist diese Differentialgleichung mit Randbedingungen für  $w$  integriert, so kann man aus (A), (B), (C) die Größen  $M, \mu$  und  $Q - \frac{dT}{ds}$  berechnen. Man kann aber auch  $M, Q$  und  $T$ , nur den Bedingungen der allgemeinen Mechanik entsprechend, vorschreiben, bekommt zwei Randbedingungen für  $w$  gemäß (A) und (B) und kann dann noch  $T_x + T_y$  berechnen, das im allgemeinen nicht null sein wird.

#### Gedankengang des Beweises

Die Fläche sei durch den Vektor

$$\bar{r} = \bar{r}(\alpha, \beta)$$

gegeben, ein Nachbarpunkt auf der Normalen  $\bar{n}$  durch

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{n} \gamma \quad |\gamma| \leq h.$$

Die räumlich verteilten, eingepprägten Kräfte seien

$$\bar{\kappa} dV = \bar{\kappa} \Delta d\alpha d\beta d\gamma$$

so daß

$$p = - \int_{-h}^h \bar{\kappa} \bar{n} d\gamma = - 2 h \bar{\kappa} \bar{n}$$

wird. Ihre virtuelle Arbeit ist

$$\delta A_s = \iiint \bar{\kappa} (\delta \bar{r} + \gamma \delta \bar{n}) \Delta d\alpha d\beta d\gamma = 2 h \iint \bar{\kappa} \delta \bar{r} \Delta d\alpha d\beta$$

da  $\int_{-h}^h \gamma d\gamma = 0$  ist.

Nach den Prinzipien der Lagrangeschen Mechanik, insbesondere dem Befreiungsprinzip hat man zunächst alles so starr wie möglich zu nehmen, d. h.

$$\delta E = 0 \quad (1), \quad \delta F = 0 \quad (2), \quad \delta G = 0 \quad (3) \quad \text{(Unausdehnbarkeit)}$$

$$\delta D = 0 \quad (6), \quad \delta D' = 0 \quad (7), \quad \delta D'' = 0 \quad (8) \quad \text{(Unverbiegbarkeit)}.$$

Weiterhin nehmen wir mit Bernoulli an, daß die Normalen solche bleiben, d. h.:

$$\delta(\bar{n} \bar{e}) = 0 \quad (4) \quad \text{und} \quad \delta(\bar{n} \bar{f}) = 0 \quad (5)$$



Mit

$$\bar{A} = -Z \frac{\partial \bar{r}}{\partial \nu} + S \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} + Q n$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{G} Q_\alpha, \quad \lambda_5 = -\sqrt{E} Q_\beta.$$

Für  $Z_\alpha, Z_\beta, S_\alpha, S_\beta$  ergeben sich vier Gleichungen, aus denen sich  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ausrechnen lassen, was uns hier nicht besonders interessiert,  $\lambda_2$  ergibt sich doppelt, was die oben genannte Gleichung zwischen  $S_\alpha, S_\beta, Z_\alpha, Z_\beta, M_\alpha, M_\beta, T_\alpha, T_\beta$  zur Folge hat.

Nun hat man zu befreien, d.h. die Bindungen (1), (2), (3), (6), (7), (8) aufzuheben, die Fläche also dehnbar und biegsam zu machen. Damit werden  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$  eingeprägte Kräfte, nicht dagegen  $\lambda_4, \lambda_5$ , wenn wir an der Bernoullischen Annahme festhalten, daß die Normalen Normalen bleiben und auch nicht  $\lambda_9$ , wenn es bei Vernachlässigung der Querkontraktion bleiben soll. Besonders zu beachten ist, daß zwar  $\lambda_7 = \lambda'_7 + \lambda''_7$  eingepreßt wird, aber nicht  $\mu = \frac{1}{2}(\lambda'_7 - \lambda''_7)$ , das zu der erwähnten rein mathematischen Beziehung (11) gehört.

Bei Annahme vollkommener Elastizität wird demnach

$$\frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{\partial \psi}{\partial E}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \psi}{\partial F}, \quad \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{\partial \psi}{\partial G}, \quad \lambda_6 = \frac{\partial \psi}{\partial D}, \quad 2 \lambda_7 = \frac{\partial \psi}{\partial D'}, \quad \lambda_8 = \frac{\partial \psi}{\partial D''}$$

zu setzen sein, wo  $\delta \int \psi d\alpha d\beta$  die virtuelle innere Arbeit ist. Setzen wir noch Isotropie voraus, so kann  $\psi$  nur von den beiden Invarianten abhängen, die wir so erhalten:

Aus

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + n \gamma$$

berechnet man

$$(\bar{d}r_1)^2 = E^* d\alpha^2 + 2 F^* d\alpha d\beta + G^* d\beta^2 + d\gamma^2$$

mit

$$E^* = E + 2 \bar{e} \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma + \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha} \right)^2 \gamma^2$$

$$F^* = F + \left( \bar{f} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha} + \bar{e} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta} \right) \gamma + \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta} \right) \gamma^2$$

$$G^* = G + 2 \bar{f} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta} \gamma + \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial \beta} \right)^2 \gamma^2$$

und daraus die absoluten Invarianten:

$$\frac{E^* G^* - F^{*2}}{E_0^* G_0^* - F_0^{*2}} \quad \text{und} \quad \frac{E^* G_0^* + E_0^* G^* - 2 F^* F_0^*}{E_0^* G_0^* - F_0^{*2}}$$

wo die mit dem Index 0 versehenen Größen die im Urzustand sind. Mit

$$E^* = E_0^* + e^*, \quad F^* = F_0^* + f^*, \quad G^* = G_0^* + g^*$$

sind auch

$$I_1^* = \frac{e^* g^* - f^{*2}}{E_0^* G_0^* - F_0^{*2}} \quad \text{und} \quad I_2^* = \frac{e^* G_0^* + g^* E_0^* - 2 f^* F_0^*}{E_0^* G_0^* - F_0^{*2}}$$

Invarianten und daher bei weiterer Annahme eines linearen Gesetzes nach Hooke:

$$\psi = \int_{-h}^h \varphi d\gamma = \int_{-h}^h (A I_1^* + B I_2^{*2}) d\gamma$$

$A, B$ , Materialkonstante.

Es ist nun leicht, im Sonderfall der Platte mit der Benutzung von  $\alpha = x, \beta = y$  und der Kirchhoffschen Annahme, daß keine Verschiebungen  $u, v$  in der Platte, sondern nur eine solche  $w$  senkrecht zur Grundebene stattfindet, die weitere Rechnung unter den üblichen Vernachlässigungen bei kleinem  $w$  durchzuführen. Es ergeben sich

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad \text{bei } \bar{A} \bar{i} = 0, \quad \bar{A} \bar{j} = 0 \text{ am Rande,}$$

$$\lambda_6 = \frac{8}{3} h^3 \left[ A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\lambda_7 = -\frac{8}{3} h^3 A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\lambda_8 = \frac{8}{3} h^3 \left[ A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right].$$

und daraus alles weitere. Aus den zwei vektoriellen Feldgleichungen sind die Reaktionen  $\lambda_4, \lambda_5, \mu$  zu eliminieren, so daß, weil zwei Gleichungen wegen  $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=0$  von selbst erfüllt sind, nur noch eine für  $w$  übrig bleibt, nämlich das oben angegebene

$$\frac{16}{3} h^3 B \Delta \Delta w = p.$$

Von den Randbedingungen bleiben noch drei stehen, die in zwei für  $w$  und eine für das noch unbekannte  $\mu$  umgeformt werden können, wie oben angegeben.

## Elementarer Existenzbeweis für die Strömung in der laminaren Grenzschicht zur Potentialströmung $U=u_1 x^m$ mit $m > 0$ bei Absaugen und Ausblasen.

Herrn Professor Dr. Richard von Mises zum 70. Geburtstag verehrungsvoll zugeeignet  
Von *Rudolf Iglisch* in Braunschweig

### 1. Einleitung: Die Formel

$$U = u_1 x^m \text{ mit } m > 0 \dots \dots \dots (1)$$

und konstantem  $u_1$  liefert (vgl. z.B. [1]) die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit bei einer Potentialströmung symmetrisch um einen ebenen unendlich ausgedehnten Keil vom Öffnungswinkel  $\beta\pi$  mit

$$\beta = \frac{2m}{m+1}, \quad m = \frac{\beta}{2-\beta} \dots \dots \dots (2),$$

wenn die  $x$ -Achse in eine Keilkannte mit der Spitze als Ursprung gelegt wird, die  $y$ -Achse senkrecht dazu in die Strömung hinein. Nach V. M. Falkner und S. W. Skan [2] werden die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen erfüllt durch den folgenden Ansatz für die Stromfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu u_1 x^{m+1}} f(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{u_1 x^{m-1}}{\nu}} \dots \dots \dots (3)$$

( $\nu$  = kinematische Zähigkeit), wenn  $f(\eta)$  der gewöhnlichen Differentialgleichung!

$$f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

genügt. Für die Geschwindigkeitskomponenten findet man:

$$u = u_1 x^m f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{u_1 x^{m-1}} \left( \frac{m+1}{2} f + \frac{m-1}{2} \eta f' \right) \dots \dots \dots (5).$$

Zu der Differentialgleichung (4) nehmen wir noch die Randbedingungen

$$f(0) = C, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \dots \dots \dots (6)$$

hinzu, von denen die beiden ersten vermöge (5) aussagen, daß die Flüssigkeit keine Geschwindigkeitskomponente längs der Wand besitzt, wohl aber eine ganz bestimmte von  $x$  abhängige Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zur Wand, und zwar bedeutet  $C > 0$  Absaugen,  $C < 0$  Ausblasen; bei anderen Absauge- oder Ausblasegesetzen läßt sich das Problem im allgemeinen nicht auf ein eindimensionales reduzieren. Die dritte Bedingung (6) sichert wie üblich den Anschluß der Grenzschichtströmung an die Potentialströmung. Man erhält Strömungsvorgänge ohne Rückströmung, wenn man noch die Zusatzvoraussetzung

$$f'(\eta) > 0 \text{ für } 0 < \eta < \infty \dots \dots \dots (7)$$

hinzunimmt.

Das Problem (4), (6) enthält die beiden reellen Parameter  $\beta$  und  $C$ , von denen im folgenden  $\beta \geq 0$ <sup>1)</sup> angenommen werden soll. Für die Wertepaare  $\beta=0, C=0$  und  $\beta=1, C=0$  hat H. Weyl [3, I] 1941 die Existenz einer Lösung, die der Zusatzbedingung (7) genügt, mit Hilfe eines Verfahrens der sukzessiven Approximation gezeigt. Im Fall  $\beta \geq 0, C=0$  wurde die Existenz einer analogen Lösung 1942 in [3, II] bewiesen, und zwar unter Heranziehung von

<sup>1)</sup> Auf die Einschränkung  $\beta < 2$  kann verzichtet werden.

Fixpunktsätzen über Funktionaltransformationen, wie sie zuerst von G. D. Birkhoff und O. P. Kellogg [4] angegeben und von J. Schauder und J. Leray [5] in großer Abstraktheit formuliert wurden. Eine ausgedehntere Darstellung fanden die Beweismethoden 1942 in [6]. Außer in den Fällen  $\beta=0$  und  $\beta=1$  wird die Frage der Eindeutigkeit der Lösung nicht behandelt.

Ohne infolge der Zeitumstände die Arbeiten von H. Weyl kennen zu können, bewies ich 1943 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (4), (6) unter der Zusatzbedingung (7) für die Wertepaare  $\beta=1$ ,  $C$  beliebig [7]. Daß ohne die Zusatzbedingung (7) die Eindeutigkeit (wenigstens für genügend große positive  $C$ ) nicht mehr gilt, wurde in [8] gezeigt. Beide Arbeiten benutzen nur elementare gestaltliche Aussagen über die Lösungen. Mit anderen Hilfsmitteln wurde von R. Iglisch und D. Grohne [9] gezeigt, daß im Falle  $\beta=0$  das Problem (4), (6) unter der Nebenbedingung (7) nur für  $C \geq -1,2385\dots$  lösbar ist. Ziel der vorliegenden Note ist es, die in [7] und [8] entwickelten Schlußweisen noch durchsichtiger zu gestalten und auf das Problem (4), (6), (7) für  $\beta \geq 0$  und alle Werte von  $C$  anzuwenden. Da der Eindeutigkeitsbeweis — vor allem für die Wertepaare  $(\beta, C)$  mit  $\beta < \frac{1}{2}$  und  $C < 0$  — langwierigere Überlegungen erfordert, muß er aus Rummangel einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben. Diese Note enthält den elementaren Existenzbeweis für  $\beta > 0$  und alle Werte von  $C$ ; da nach [9] im Fall  $\beta=0$  nicht für alle Werte von  $C$  Lösungen existieren, wird man nicht erwarten können, daß die elementaren Methoden ohne spezielle Anpassung diesen Fall mitliefern.

Es sei gleich hier erwähnt, daß das Problem (4), (6), (7) mit

$$F(f) = f'(\eta); \quad f'' = F\dot{F}; \quad f''' = (F\dot{F})F = \dot{F}F^2 + \dot{F}^2 F \dots (8)$$

(· bedeutet Ableitung nach  $f$ ) gleichbedeutend ist mit der Lösung der Differentialgleichung

$$F(F\dot{F}) + fF\dot{F} + \beta(1 - F^2) = 0 \dots (9)$$

unter den Bedingungen

$$F(C) = 0, \quad F(\infty) = 1; \quad F(f) > 0 \text{ für } f > C \dots (10)$$

Aus  $F(f)$  erhält man mittels

$$\eta = \int_C^f \frac{df}{F(f)} \dots (11)$$

den Zusammenhang zwischen  $f$  und  $\eta$ .

2. Hilfssatz 1: Die Lösung  $F(f)$  von (9) unter der Anfangsbedingung

$$F(C) = 0, \quad F(C)\dot{F}(C) = a > 0 \dots (12)$$

nimmt bei  $\beta \geq 0$  und genügend großem  $a$  für gewisse Werte  $f > C$  Funktionswerte an, die größer sind als 1.

Beweis: Der Satz ist gleichbedeutend mit folgendem: Die Lösung von (4) unter den Anfangsbedingungen

$$f(0) = C, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = a > 0 \dots (13)$$

besitzt bei  $\beta \geq 0$  und genügend großem  $a$  Ableitungswerte  $f'(\eta) > 1^2$ .

Zum Beweis des letzteren Satzes unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall I:  $C \geq 0$ .

Wir betrachten nur das Intervall  $0 \leq \eta \leq 1$ . Wäre hier im Gegensatz zur Behauptung stets die Annahme

$$f'(\eta) \leq 1 \text{ für } 0 \leq \eta \leq 1 \dots (14)$$

richtig, so wäre dort

$$f(\eta) \leq C + \eta \leq C + 1. \dots (15)$$

Nun ist nach (4):

$$f''' = -ff'' - \beta(1 - f^2) \leq 0, \text{ solange } f''(\eta) \geq 0 \text{ ist} \dots (16),$$

wie nach (14) folgt.  $f''(\eta)$  nimmt also solange von  $f''(0) = a$  an ab. Daher folgt aus (15) und (16), solange  $f''(\eta) \geq 0$  ist,

$$f'''(\eta) \geq -(C + 1)a - \beta,$$

<sup>2)</sup> Daß die hier und im folgenden benutzten Lösungen der Differentialgleichungen existieren, soweit sie benötigt werden, ist leicht zu sehen. Es folgt z. B. auch aus einem Satze von F. Rellich [10] (vgl. dort insbesondere S. 171 unten).

daraus durch Integration

$$f''(\eta) \geq a - [(C+1)a + \beta]\eta \dots \dots \dots (17).$$

Sicher ist mithin  $f''(\eta) \geq 0$  bis zum Wert

$$\eta_0 = \frac{a}{(C+1)a + \beta} \leq 1 \dots \dots \dots (18)$$

hin. Wir betrachten fortan nur das Intervall  $0 \leq \eta \leq \eta_0 \leq 1$ .

Hier folgt aus (17):

$$f'(\eta) \geq a\eta - \frac{1}{2} [(C+1)a + \beta]\eta^2$$

und somit nach (18)

$$f'(\eta_0) \geq \frac{a^2}{(C+1)a + \beta} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{(C+1)a + \beta} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{(C+1)a + \beta} > 1$$

bei genügend großem  $a$  entgegen der Annahme (14).

Fall II:  $C < 0$ .

Man schreibe (16) so um:

$$f''' = -(f-C)f'' - \beta(1-f^2) - Cf''.$$

Nun läuft der Schluß analog wie früher. Man erhält, wenn man jetzt entsprechende Formelnummern mit einem Stern versieht:

$$f(\eta) - C \leq \eta \leq 1 \dots \dots \dots (15^*).$$

Solange  $f'' \geq 0$  bleibt, folgt aus (19):

$$(f'')' - (-C)f'' = -pos, \quad f''(0) = a,$$

damit

$$f''(\eta) = e^{\eta(-C)} \left[ a + \int_0^\eta (-pos) e^{-(-C)\eta} d\eta \right],$$

also für  $0 \leq \eta \leq 1$

$$f''(\eta) \leq ae^{-C}.$$

Somit folgt aus (19) und (15\*):

$$f'''(\eta) \geq -ae^{-C} - \beta, \quad f''(\eta) \geq a - [ae^{-C} + \beta]\eta \dots \dots \dots (17^*).$$

$f''(\eta) \geq 0$  bis

$$\eta_0 = \frac{a}{ae^{-C} + \beta} < 1 \dots \dots \dots (18^*)$$

hin. Schließlich wie vorhin

$$f'(\eta_0) \geq \frac{1}{2} \frac{a^2}{ae^{-C} + \beta} > 1$$

für genügend großes  $a$ , entgegen der Annahme (14).

3. Hilfssatz 2: Die Lösung des Anfangswertproblems (9), (12) bleibt bei genügend kleinem  $a$  stets kleiner als 1, falls  $\beta > 0$  ist; sie steigt monoton bis zu einem Maximum  $< 1$  an und fällt danach stets ab, solange (7) erfüllt ist.

Beweis: Fall I:  $C \geq 0$ .

(9) geht mit der Abkürzung

$$U(F) = F\dot{F} \dots \dots \dots (19)$$

infolge

$$\frac{dU}{df} = \frac{dU}{dF} \dot{F}$$

über in

$$U \frac{dU}{dF} = -\beta(1-F^2) - p(F) \dots \dots \dots (20),$$

wobei  $p(F) = fU$  infolge  $f \geq C$  eine positive Funktion ist, solange  $U > 0$  gilt. Integration von (20) liefert unter Beachtung von (12):

$$\frac{U^2}{2} < \frac{a^2}{2} - \beta \left( F - \frac{F^3}{3} \right) \dots \dots \dots (21).$$

Da bei genügend kleinem  $\frac{1}{2}a^2$  der Ausdruck rechter Hand zwischen  $F=0$  und  $F=1$ , wo er verschiedenes Vorzeichen hat, verschwindet, wird daher an einer Stelle  $F_1$  zwischen 0 und 1 die Funktion  $U=0$ , mithin dort auch  $\dot{F}=0$ . — Sei etwa  $\dot{F}(f_1)=0$ . An jeder solchen Stelle  $f_1$  mit  $\dot{F}=0$ ,  $0 < F < 1$  ist aber nach (9) und (8)  $\ddot{F} < 0$ , es liegt also ein echtes Maximum vor; hinter  $f_1$  muß daher  $F(f)$  dauernd abnehmen, solange  $F > 0$  ist.

Fall II:  $C < 0$ .

Man schreibe (9) so um

$$F(F\dot{F}) + (f + |C|)F\dot{F} - |C|F\dot{F} + \beta(1 - F^2) = 0.$$

Dann erhält man

$$U \frac{dU}{dF} = |C| U - \beta(1 - F^2) - p(F) \quad \dots \dots \dots (20*),$$

solange  $U > 0$  ist, und es kommt wieder nur darauf an zu zeigen, daß  $U(F_1)=0$  sein muß für einen Wert  $F_1 < 1$ . Die rechte Seite von (20\*) ist für  $F=0$  bei genügend kleinem  $a$  negativ; daher nimmt für kleine  $F$ -Werte  $U$  ab bis zu einer Stelle  $F_2$ , an der die rechte Seite von (20\*) verschwindet. Für  $0 \leq F \leq F_2$  gilt sicher

$$|C|U < |C|U(0) = |C|a.$$

Solange kann man statt (20\*) schreiben

$$U \frac{dU}{dF} = |C|a - \beta(1 - F^2) - p(F) - p_1(F) \quad \dots \dots \dots (20**),$$

und findet zunächst

$$F_2 \geq \sqrt{1 - |C| \frac{a}{\beta}} = F_3 < 1.$$

Durch Integration von (20\*\*) erhält man

$$\frac{U^2}{2} < \frac{a^2}{2} - (\beta - |C|a)F + \beta \frac{F^3}{3} \quad \dots \dots \dots (21*).$$

Da bei genügend kleinem  $a$  die rechte Seite bei  $F=0$  und  $F=F_3$  verschiedenes Zeichen hat, folgt wieder die Existenz einer Stelle  $F_1$  der verlangten Art.

4. Hilfssatz 3: Es gibt im Falle  $\beta > 0$  keine Lösung  $F(f)$  von (9), die sich für große Werte von  $f$  monoton wachsend einer horizontalen Asymptote  $F=b$  mit  $0 < b < 1$  annähert.

Beweis: Indirekt. Für  $f \geq f_0 > 0$  sei schon  $1 > b > F(f) > b - \varepsilon > 0$ . Aus (9) und (8) folgt, daß  $\dot{F} \geq 0$  für  $f > 0$  und  $0 < F < 1$  nur gelten kann, wenn  $\dot{F} < 0$  ist; also ist in unserem Falle sicher  $\dot{F} < 0$  für  $f \geq f_0$ . Aus (9) ergibt sich weiter für  $f \geq f_0$

$$\begin{aligned} -\dot{F}F^2 &= \beta(1 - F^2) + fF\dot{F} + F\dot{F}^2 > \beta(1 - b^2), \\ -\dot{F} &> \frac{\beta(1 - b^2)}{b^2} = c^2 > 0. \end{aligned}$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} -\dot{F}(f) + \dot{F}(f_0) &> c^2(f - f_0), \\ \dot{F}(f_0) &> c^2(f - f_0), \end{aligned}$$

was bei großem  $f$  zum Widerspruch führt.

5. Der Existenzsatz: Das Problem (9), (10) besitzt im Fall  $\beta > 0$  mindestens eine Lösung  $F(f)$ . — Daraus folgt: Das Problem (4), (6), (7) besitzt bei  $\beta > 0$  mindestens eine Lösung  $f(\eta)$ .

Beweis: Unter den Anfangsbedingungen (12) hat (9) nach Hilfssatz 2 bei genügend kleinem  $a$  Lösungen, die bis zu einem Maximum  $< 1$  ansteigen und dann abfallen. Sei  $a^*$  die obere Grenze aller  $a$ -Werte, so daß für  $a < a^*$  das Maximum  $< 1$  bleibt. Ein solches  $a^*$  muß in Hinblick auf Hilfssatz 1 existieren. Zu  $a^*$  gehöre die Lösung  $F^*(f)$  von (9).

I.  $F^*(f)$  kann  $F \equiv 1$  nicht im Endlichen berühren, da  $F^*(f) \equiv 1$  die einzige Lösung von (9) ist, die an einer Stelle  $f_0$  bei horizontaler Tangente den Wert 1 annimmt.

II.  $F^*(f)$  kann kein Maximum besitzen für einen endlichen Wert  $f_1$ .

a)  $F^*(f)$  kann keine Werte  $> 1$  annehmen wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von (9) von den Anfangsbedingungen.

b)  $F^*(f_1) = 1$  war unter I ausgeschlossen.

c) Wäre  $F^*(f_1) = d < 1$ , so gäbe es ein  $f_2 > f_1$ , mit  $F^*(f_2) < d$ , etwa  $= d - 2\varepsilon$ . Man wähle  $a = a^* + \delta$ . Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen müßte für das zugehörige  $F_\delta(f)$  bei genügend kleinem  $\delta$  gelten:

$$d + \varepsilon > F_\delta(f_1) > d - \varepsilon, \quad F_\delta(f_2) < F^*(f_2) + \varepsilon < d - \varepsilon,$$

was für alle  $F_\delta$  mit genügend kleinem  $\delta$  bei Beachtung von  $F_\varepsilon(C) = 0$  das Vorliegen eines Maximums  $< 1$  bedeutet gegen die Konstruktion von  $a^*$ .

III.  $F^*(f)$  muß sich also monoton wachsend für  $f \rightarrow \infty$  einer Asymptote  $\leq 1$  nähern, die nach Hilfssatz 3 nicht  $< 1$  sein kann. Also ist  $F^*(f)$  eine Lösung des Randwertproblems (9), (10).

### Schriftenverzeichnis

- [1] H. Schlichting: Grenzsichttheorie. Karlsruhe 1951; insbes. S. 122.
- [2] V. M. Falkner und S. W. Skan: Some approximate solutions of the boundary layer equations. A. R. C. Rep. a. Mem. 1914. — Phil. Mag. 12 (1931), S. 865. — Aeron. Res. Comm. Rep. a. Mem. 1314.
- [3] H. Weyl: Concerning the differential equations of some boundary layer problems I u. II. Proc. Nat. Acad. Sci. 27 (1941), S. 578—583 und 28 (1942), S. 100—102.
- [4] G. D. Birkhoff und O. P. Kellogg: Invariant points in functionspace. Trans. Am. Math. Soc. 23 (1922), S. 96—115.
- [5] J. Schauder: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Mathematica 2 (1930), S. 171—180. — J. Leray und J. Schauder: Topologie et équations fonctionnelles. J. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 51 (1934), S. 45—78.
- [6] H. Weyl: On the differential equations of the simplest boundary-layer problems. Ann. of Math. 43, 1942, S. 381—407.
- [7] R. Iglisch: Über das asymptotische Verhalten der Lösung einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung 3. Ordnung. Veröffentl. des Math. Inst. der Techn. Hochsch. Braunschweig 1943; insbes. S. 14ff.
- [8] R. Iglisch: Über die Mehrdeutigkeit der Lösungen beim ebenen Staupunktsproblem mit homogenem Absaugen und Ausblasen. Veröffentl. des Math. Inst. der Techn. Hochsch. Braunschweig 1944.
- [9] R. Iglisch und D. Grohne: Die laminare Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit schrägem Absaugen und Ausblasen. Veröffentl. des Math. Inst. der Techn. Hochsch. Braunschweig, Bericht 1/45, 1945.
- [10] F. Rellich: Über die Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. Festschrift zur Feier des 200jähr. Bestehens der Akad. d. Wissensch. in Göttingen 1951, Math.-Phys. Klasse, S. 168—174.

## Der Aufschlag von Rotationskörpern auf eine Wasseroberfläche

Richard v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

Von C. Schmieden in Darmstadt

*Der Aufschlag von Rotationskörpern auf eine freie Wasseroberfläche wird unter Voraussetzung schwacher Konturkrümmung untersucht und gezeigt, daß sich die Integralgleichung des Problems auf eine Abelsche Integralgleichung reduzieren läßt. Für einige Spezialfälle wird die Lösung in geschlossener Form angegeben und die auftretende Stoßkraft berechnet.*

*The striking down of rotary bodies on a free water-surface under the supposition of a weak curvature of the contours is examined, and it is shown that the integral equation of the problem can be reduced to an Abel integral equation. For some special cases the solution in closed form is indicated and the impulsive force acting thereby is calculated.*

*Le ricochet de corps rotatoires sur une surface libre d'eau à la supposition de courbement faible des contours est examiné, et il est montré que l'équation intégrale du problème peut être réduite à une équation intégrale d'Abel. Pour quelques cas spéciaux la solution en forme serrée est indiquée, et la force de propulsion qui se produit est calculée.*

Удар тел вращения, падающих на свободную водную поверхность, исследуется в предположении слабой кривизны контура; показывается, что интегральное уравнение задачи приводимо к абелевому интегральному уравнению. Для некоторых частных случаев решение дано в замкнутом виде и вычислена возникающая сила удара.

Läßt man einen Körper auf die freie Oberfläche einer Flüssigkeit aufschlagen, so ergeben sich bekanntlich sehr große Stoßkräfte. Um diese Kräfte wenigstens in erster Näherung zu erfassen, setzt man nach dem Vorgang von Wagner<sup>1)</sup> den Körper als so schwach gekrümmt voraus, daß die Spritzerbildung keine wesentliche Rolle spielt. Die von Wagner für den zweidimensionalen Fall entwickelten Ansätze lassen sich sinngemäß auf gewisse einfache dreidimensionale Fälle übertragen<sup>2)</sup>, in denen auch der rotationssymmetrische Fall enthalten ist;

<sup>1)</sup> H. Wagner, Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 193.

<sup>2)</sup> C. Schmieden, Ing.-Archiv 10 (1939), S. 1. Im folgenden mit „I“ zitiert.

alle für die Berechnung der Stoßkräfte charakteristischen Größen wurden aber damals nur in Form von Reihenentwicklungen gewonnen. Hier soll nun gezeigt werden, daß für den Fall der Rotationssymmetrie die beherrschende Integralgleichung vom Abelschen Typus ist und über eine gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung in einigen Fällen geschlossen gelöst werden kann.

Anstatt den Rotationskörper auf die Wasseroberfläche aufschlagen zu lassen, kann man sich auch die ursprünglich ebene Flüssigkeitsoberfläche gegen den ruhenden Körper bewegt denken, wobei die Geschwindigkeit  $V(t)$  im Unendlichen als Funktion der Zeit  $t$  gegeben sei. Bei diesem Stoßvorgang ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche wesentlich vertikal gerichtet, während sie am Körper selbst tangential zu ihm verläuft. Ist der Körper nur schwach gekrümmt (durchgehend kleine Tangentenneigung zur Oberfläche), so kann diese Strömung in jedem Augenblick angenähert ersetzt werden durch die Strömung um eine Kreisplatte, die genau die Größe der momentanen Stoßfläche besitzt. Die Geschwindigkeiten an der freien Oberfläche sind dann mit demselben Grade der Annäherung zu ersetzen durch die Vertikalgeschwindigkeiten in der Symmetrieebene der Plattenströmung.

Die Strömung um eine in Richtung ihrer Normalen angeströmte Kreisplatte ist bekannt; ist  $c$  ihr Radius, so gilt für einen Punkt  $R > c$  in der Symmetrieebene, daß die Normalgeschwindigkeit  $v_n(t)$  wird (I, 48):

$$v_n(t) = V(t) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \arcsin \frac{c}{R} \right) \right] \quad \dots \dots \dots (1).$$

Das Wasserteilchen an der Stelle  $R$  erreicht zur Zeit  $t$  eine Erhebung über dem Nullniveau  $\eta(R, t)$ :

$$\eta(R, t) = \int_0^t v_n(t) dt = \int_0^c v_n(c) \frac{dt}{dc} \cdot dc \quad \dots \dots \dots (2).$$

Es erreicht offenbar die Oberfläche des Körpers, wenn die momentane Stoßfläche die Grundrißprojektion des Teilchens erreicht, also für  $c = R$ . Setzt man noch

$$V(t) \frac{dt}{dc} = u(c) \quad \dots \dots \dots (3),$$

wobei  $u$  als Quotient zweier Geschwindigkeiten dimensionslos ist, so erhält man für  $u(c)$  folgende Integralgleichung:

$$\eta(R) = \int_0^R u(c) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \arcsin \frac{c}{R} \right) \right] dc \quad \dots \dots \dots (4).$$

Hierin ist  $\eta(R)$  die Gleichung des Meridianschnittes des Rotationskörpers. Gl. (4) läßt sich nun in eine Abelsche Integralgleichung verwandeln; dazu wird eine neue Funktion  $\psi(c)$  eingeführt, die definiert ist durch

$$\int_0^c u(c) dc = c \cdot \psi(c); \quad u(c) = \psi(c) + c\psi'(c) \quad \dots \dots \dots (5).$$

Beachtet man, daß  $\psi(0)$  endlich sein muß, so geht (4) durch partielle Integration über in:

$$\eta(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^R [2\psi(c) + c\psi'(c)] \frac{c dc}{\sqrt{R^2 - c^2}} \quad \dots \dots \dots (6).$$

Wird hier  $R^2 = x$ ;  $c^2 = \xi$  gesetzt, so folgt mit

$$\begin{aligned} \eta(R) &\equiv \varphi(x); & \varphi(0) &= 0; & c \frac{d\psi}{dc} &= 2\xi \frac{d\psi}{d\xi}, \\ \varphi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[ \psi(\xi) + \xi \frac{d\psi}{d\xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{x - \xi}} \quad \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

und mit der Abkürzung

$$\frac{2}{\pi} \left( \psi(\xi) + \xi \frac{d\psi}{d\xi} \right) = f(\xi) \quad \dots \dots \dots (8)$$

die Abelsche Integralgleichung:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi; \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots \quad (9).$$

Ihre Lösung lautet bekanntlich

$$\pi \cdot f(\xi) = \int_0^\xi \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\xi-x}} dx \quad \dots \quad (10).$$

Setzt man statt  $x$  und  $\xi$  wieder  $R$  und  $c$  ein, so folgt

$$2\psi(c) + c \frac{d\psi}{dc} = \int_0^c \frac{\frac{d\eta}{dR} \cdot dR}{\sqrt{c^2 - R^2}} \quad \dots \quad (11).$$

Das ist eine lineare Dgl. 1. O., deren Integrationskonstante verschwinden muß, da die Lösung der homogenen Dgl. proportional  $c^{-2}$  ist. Für einige spezielle Fälle soll jetzt der Zusammenhang zwischen  $\eta(R)$  und  $u(c)$  bestimmt werden.

1. Fall:

$$\eta(R) = k_\nu R^\nu; \quad \nu \geq 1.$$

Damit wird (11):

$$2\psi(c) + c \frac{d\psi}{dc} = \nu k_\nu \int_0^c \frac{R^{\nu-1} dR}{\sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\nu k_\nu c^{\nu-1}}{2} \int_0^1 \frac{p^{\nu-1}}{(1-p)^{1/2}} dp.$$

Da aber

$$\int_0^1 p^{\nu/2-1} (1-p)^{1/2-1} dp = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

ist, so wird

$$2\psi(c) + c \frac{d\psi}{dc} = \lambda_\nu c^{\nu-1}; \quad \lambda_\nu = \frac{\nu k_\nu}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}.$$

Hieraus folgt dann

$$\psi(c) = \frac{\lambda_\nu}{\nu+1} c^{\nu-1}; \quad u(c) = \psi + c\psi' = \frac{\nu\lambda_\nu}{\nu+1} c^{\nu-1} \quad \dots \quad (12).$$

In (12) steckt speziell der Fall des geraden Kreiskegels; ist  $\alpha$  der halbe Öffnungswinkel, so gilt

$$\eta = R \operatorname{ctg} \alpha; \quad u(c) = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. Fall: Die Kugel; wird der Kugelradius gleich eins gesetzt, so gilt

$$\eta(R) = 1 - \sqrt{1 - R^2}; \quad \varphi(x) = 1 - \sqrt{1 - x}; \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

also nach (10):

$$\pi f(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(\xi-x)}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}; \quad 2\psi(c) + c \frac{d\psi}{dc} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+c}{1-c}.$$

Durch Integration dieser Dgl. erhält man

$$\psi(c) = \frac{1}{2c} - \frac{1-c^2}{4c^2} \ln \frac{1+c}{1-c}; \quad u(c) = \frac{1+c^2}{4c^2} \ln \frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2c} \quad \dots \quad (13).$$

3. Fall: Die Spitze des Körpers ist nach einer Sinuslinie geformt:

$$\eta = A \arcsin R, \quad 0 \leq R \leq 1.$$

Nach (11) wird hier

$$2\psi(c) + c \frac{d\psi}{dc} = A \int_0^c \frac{dR}{\sqrt{(1-R^2)(c^2-R^2)}} = A \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = AK(c).$$

Durch Integration erhält man

$$\psi(c) = A \frac{E(c) - (1-c^2)K(c)}{c^2}; \quad u(c) = A \frac{K(c) - E(c)}{c^2} \quad 0 < c < 1 \quad \dots (14).$$

Darin sind  $E(c)$  und  $K(c)$  vollständig elliptische Normalintegrale.

Berechnung der Stoßkräfte. Das Potential der senkrecht zu ihrer Ebene angeströmten Kreisplatte lautet (I. (1) für  $b=c$ )

$$\Phi = Vx \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{c}{\sqrt{\lambda}} - \arctg \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \right) \right\} \quad \dots (15).$$

Hierin ist  $x$  die Normalenrichtung und  $c$  der Radius der Platte, während  $\lambda$  mit den Koordinaten  $x, R$  in einem Meridianschnitt verknüpft ist durch

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{R^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad \dots (16)$$

In der Plattenebene ist außerhalb der Kreisplatte das Potential Null; auf der Platte selbst sind  $x$  und  $\lambda$  Null, aber derart, daß

$$\lim_{x, \lambda \rightarrow 0} \frac{x^2}{\lambda} = 1 - \frac{R^2}{c^2}.$$

Damit wird auf der Platte das Potential — und zwar auch der Absolutströmung! —

$$\Phi^* = \frac{2V}{\pi} \sqrt{c^2 - R^2} \quad \dots (17).$$

Die Normalgeschwindigkeit außerhalb der Platte, aber in der Plattenebene wird

$$v_n = V \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{c}{\sqrt{\lambda}} - \arctg \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \right) \right\} \quad \dots (18),$$

worin nach (16)  $\lambda = R^2 - c^2$  zu setzen ist. Ersetzt man noch den  $\arctg$  durch den  $\arcsin$ , so erhält man (1):

$$v_n = V \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} - \arcsin \frac{c}{R} \right) \right\} \quad \dots (19).$$

Auf der Platte selbst wird  $v_n$  natürlich Null. Der Impuls der Flüssigkeit, der zur Berechnung der Stoßkraft berücksichtigt werden muß, ist durch das über die eine Seite der Platte erstreckte Integral:

$$B = \varrho \int \Phi^* df = 4 \varrho V \int_0^c \sqrt{c^2 - R^2} \cdot R dR = \frac{4}{3} \varrho V c^3 \quad \dots (20)$$

gegeben, wobei (17) benutzt wurde. Für die Kraft auf den Körper mit dem momentanen Stoßkreisradius  $c$  folgt damit

$$P = \frac{4}{3} \varrho \frac{d}{dt} (c^3 V) \quad \dots (21).$$

Dies ist also die Kraft auf den eintauchenden Körper zur Zeit  $t$ , wenn er die Eintauchgeschwindigkeit  $V(t)$  besitzt. Schlägt der Körper zu Beginn des Eintauchvorganges mit der Geschwindigkeit  $V_0$  auf die Wasseroberfläche auf, so gilt, wenn  $x$  seine Eintauchtiefe bedeutet

$$m\ddot{x} = -P = -\frac{4}{3} \varrho \frac{d}{dt} (c^3 V) \rightarrow m(V_0 - \dot{x}) = \frac{4}{3} \varrho c^3 V = \frac{4}{3} \varrho c^3 \dot{x} \quad \dots (22)$$

und wegen  $u(c) = V(c) \frac{dt}{dc}$  auch  $\dot{x} = u(c) \cdot \dot{c}$  so daß

$$\dot{x} = \frac{V_0}{1 + \frac{4}{3} \frac{\varrho}{m} c^3} = \frac{V_0}{1 + \mu_0 c^3}; \quad \mu_0 = \frac{4}{3} \frac{\varrho}{m} \quad \dots (23),$$

$$\ddot{x} = -\frac{V_0}{(1 + \mu_0 c^3)^2} \cdot 3\mu_0 c^2 \dot{c} = -\frac{V_0^2}{(1 + \mu_0 c^3)^3} \cdot \frac{3\mu_0 c^2}{u(c)} \quad \dots (24).$$

Hieraus folgt sofort die Darstellung von  $P$  durch  $c$ :

$$P = -m\ddot{x} = \frac{3\mu_0 m V_0^2 c^2}{u(c) \cdot (1 + \mu_0 c^3)^3} \dots \dots \dots (25).$$

Ersetzt man in (23)  $\dot{x}$  durch  $u(c)\dot{c}$ , so erhält man durch Integration die Zeit  $t$  als Funktion von  $c$ :

$$V_0 t = \int_0^c (1 + \mu_0 c^3) u(c) \cdot dc \dots \dots \dots (26).$$

Da endlich die Eintauchtiefe  $x$  durch das Integral:

$$x = \int_0^u u(c) dc \dots \dots \dots (27)$$

ebenfalls als Funktion von  $c$  gegeben ist, liefern die drei letzten Relationen den Zusammenhang zwischen Stoßkraft, Eintauchtiefe und Zeit in Parameterform. Ist also für eine gegebene Kontur die Größe  $u(c)$  berechnet, so ist bis auf Integrationen alles geleistet.

Zum Schluß mögen diese Formeln für die drei oben behandelten Sonderfälle ausgewertet werden.

1. Der gerade Kreiskegel mit dem halben Öffnungswinkel  $\alpha$ :

$$u(c) = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \alpha; \quad P = \frac{12}{\pi} \mu_0 m \operatorname{tg} \alpha V_0^2 \cdot \frac{c^2}{(1 + \mu_0 c^3)^3},$$

$$x = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \alpha \cdot c; \quad V_0 t = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \alpha \left\{ c + \frac{\mu_0}{4} c^4 \right\}.$$

2. Die Kugel vom Radius Eins:

$$u(c) = \frac{1 + c^2}{4c^2} \ln \frac{1 + c}{1 - c} - \frac{1}{2c}; \quad P = 3\mu_0 m V_0^2 \frac{c^2}{u(c)(1 + \mu_0 c^3)^3}.$$

$$x = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1 - c^2}{2c} \ln \frac{1 + c}{1 - c} \right\}; \quad V_0 t = x + \frac{\mu_0}{8} \left\{ \frac{1}{2} (2c^2 + c^4 - 3) \ln \frac{1 + c}{1 - c} + 3c - c^3 \right\}.$$

3. Der Sinus-Kopf:

$$u(c) = A \frac{K(c) - E(c)}{c^2}, \quad P = \frac{3\mu_0 m V_0^2}{A} \cdot \frac{c^4}{[K(c) - E(c)](1 + \mu_0 c^3)^3},$$

$$x = \frac{A}{c} [E(c) - (1 - c^2) K(c)],$$

$$V_0 t = x + \frac{A\mu_0}{3} [(2 - c^2) E(c) - 2(1 - c^2) K(c)].$$

## Bemerkung zur Fehlerabschätzung beim Adamschen Interpolationsverfahren

Herrn R. v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

Von W. Tollmien in Göttingen

Im Jahre 1930 veröffentlichte R. v. Mises [1] in dieser Zeitschrift eine Abhandlung „Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen“, die sich für die Entwicklung der Praktischen Analysis als bedeutsam und folgenreich erwiesen hat. Einmal enthält dieser Aufsatz einen nachdrücklichen Hinweis auf das Adamssche Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zu jener Zeit in weiten Kreisen noch unbekannt oder zum mindesten nicht nach Gebühr gewürdigt war. Das ursprünglich Adamssche Verfahren, das auf einer fortlaufenden Extrapolation beruht, wurde in der anschließenden Entwicklung verbessert, indem Interpolationen zur Sicherung und Korrektur der Extrapolationen herangezogen wurden. Auch eine schematisierte „Anlaufrechnung“ wurde entworfen, um nach festen Regeln die Ausgangswerte zu erhalten, die zur Ingangsetzung des Adamsschen Verfahrens notwendig sind. In jener Abhandlung [1] hatte R. v. Mises des weiteren zum ersten Male eine Fehlerabschätzung für das Adamssche Verfahren gegeben, welche die Fehlerfortpflanzung voll berücksichtigt, während früher nur der Fehler beim Einzelschritt betrachtet

worden war. 1938 schrieb ich selbst einen kleinen Aufsatz [2], in welchem ich das Problem der Fehlerabschätzung von einem anderen Standpunkt aus angriff. Die von mir unter einem gewissen Vorbehalt vorgeschlagene Fehlerabschätzung war günstiger als die von R. v. Mises. Da bei der Durchführung meiner Fehlerabschätzung noch eine gewisse Schwierigkeit bestehen geblieben war, auf die ich gleich zu sprechen kommen werde, setzten nach geraumer Zeit Bemühungen von anderer Seite ein, den Abstand zwischen der Misesschen Fehlerschranke und der von mir vorgeschlagenen zu verringern. J. Weißinger [3] verschärfte die Misessche Fehlerabschätzung, während E. Mohr [4] sich enger an meinen Gedankengang anschloß.

Der siebzigste Geburtstag von R. v. Mises gibt mir nun einen willkommenen Anlaß, auf diese Angelegenheit zurückzukommen und kurz darzulegen, wie ich selbst mir die Behebung jener Schwierigkeit vorstelle, die in meiner früheren Arbeit noch enthalten war. Mein Ausgangspunkt war eine sehr gut bekannte Abschätzungsformel aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Es sei eine Näherung  $\tilde{y}(x)$  für das Integral  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

bei der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  gesucht, wobei die Näherung der Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = f(x, y) + \vartheta(x) \quad \dots \dots \dots (2)$$

genügt. Ist  $\delta$  eine Schranke für den Fehlerbetrag  $|y_k - \tilde{y}|$  bei  $x = x_k$ , so gilt

$$|y - \tilde{y}| \leq \delta e^{M|x-x_k|} + \frac{\varepsilon}{M} (e^{M|x-x_k|} - 1) \quad \dots \dots \dots (3).$$

$M$  ist die Lipschitzsche Konstante für  $f$ :

$$|f(x, y_I) - f(x, y_{II})| = M |y_I - y_{II}| \quad \dots \dots \dots (4).$$

Die Definition von  $\varepsilon$  erfolgt durch die Beziehung:

$$\left| \int_{x_k}^x \vartheta(x) dx \right| \leq \varepsilon |x - x_k| \quad \dots \dots \dots (5)$$

oder etwas roher durch die Beziehung

$$|\vartheta| \leq \varepsilon \quad \dots \dots \dots (6).$$

Auf die Anlaufrechnung beim Adamsschen Interpolationsverfahren will ich hier nicht eingehen (vgl. dazu etwa [2]). Die Näherung  $\tilde{y}$  werde für äquidistante Argumente  $x_i = x_0 + i\bar{h}$  berechnet, die wir als Stützstellen bezeichnen wollen.  $\bar{h}$  ist die Schrittweite. Es werde abgekürzt:

$$\tilde{y}(x_i) = \tilde{y}_i, \quad f(x_i, \tilde{y}(x_i)) = F(x_i) = F_i \quad \dots \dots \dots (7).$$

Verwendet man ein Interpolationspolynom 3. Grades für  $F$ , so erfolgt bei der „fortlaufenden Rechnung“ (nach Abschluß der Anlaufrechnung) die Berechnung der Näherungen nach der Formel:

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \bar{h} \left\{ F_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla_{n+1} F - \frac{1}{12} \nabla_{n+1}^2 F - \frac{1}{24} \nabla_{n+1}^3 F \right\} \quad \dots \dots \dots (8).$$

Die Näherung  $\tilde{y}$  genügt also der Differentialgleichung:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \tilde{F}(x) \quad \dots \dots \dots (9),$$

wo  $F(x)$  das Interpolationspolynom 3. Grades ist, das in den Stützstellen  $x_{n+1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$  die entsprechenden Werte  $F_{n+1}$ ,  $F_n$ ,  $F_{n-1}$ ,  $F_{n-2}$  annimmt (s. Bild). Gemäß den Formeln (1), (2) und (9) ist

$$\vartheta(x) = \tilde{F} - F \quad \dots \dots \dots (10),$$

also bis auf das Vorzeichen der Interpolationsfehler bei der Approximation von  $F$ . Sobald man diesen Interpolationsfehler in brauchbarer Weise abgeschätzt hat, so ist die Bestimmung des Methodenfehlers bei der fortlaufenden Rechnung des Adamsschen Verfahrens nach (3) erledigt, wobei  $\delta$  die Schranke für den Fehlerbetrag am Schluß der Anlaufrechnung ist, die bei  $x = x_k$  enden möge.

Bei der Abschätzung des Interpolationsfehlers [vgl. (10)] ergibt sich nun die erwähnte Schwierigkeit. Man würde zunächst geneigt sein, das Cauchysche Restglied für den Interpolationsfehler zu benutzen, also

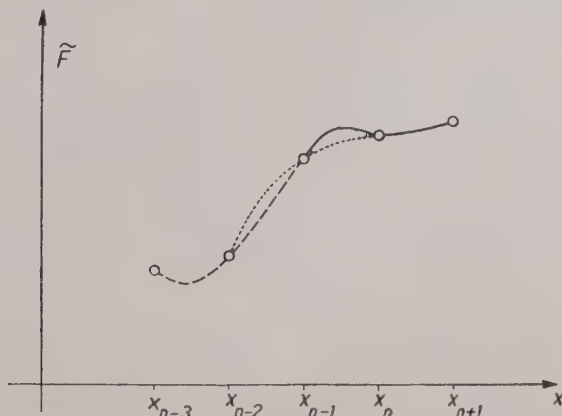
$$F(x) - \tilde{F}(x) = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{4!} \left( \frac{d^4 F}{dx^4} \right)_{x=\xi} \quad (11)$$

setzen, wo  $\xi$  ein Zwischenwert zwischen  $x(x_n < x < x_{n+1})$  und den 4 Stützstellen  $x_{n+1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$  ist. Jedoch ist  $\tilde{F}(x)$  in den Intervallen zwischen den Stützstellen durch verschiedene Polynome 3. Grades definiert, z. B.:

$$\tilde{F}(x) = F_{n+1} + \frac{x - x_{n+1}}{h} \nabla_{n+1} F + \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)}{2! h^2} \nabla_{n+1}^2 F + \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{3! h^3} \nabla_{n+1}^3 F \quad \text{für } x_n \leq x \leq x_{n+1} \quad (12a),$$

dagegen

$$\tilde{F}(x) = F_n + \frac{x - x_n}{h} \nabla_n F + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{2! h^2} \nabla_n^2 F + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{3! h^3} \nabla_n^3 F \quad \text{für } x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad (12b).$$



Der Verlauf von  $\tilde{F}$  über zwei Schrittweiten ist durch eine ausgezogene Linie angegeben. Die gestrichelten bzw. punktierten Linien stellen die beiden verschiedenen Interpolationspolynome dar. Die durch Nullkreise markierten Punkte entsprechen den Werten  $F(x_i)$ .

Daher springt bereits die 1. Ableitung von  $\tilde{F}(x)$  an den Stützstellen (s. Bild). Würde man nun formal bilden:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{\partial^2 f(x, \tilde{y})}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f(x, \tilde{y})}{\partial x \partial \tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{y}^2} \left( \frac{d\tilde{y}}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2}$$

und in diesem Ausdruck nach (9)  $\frac{d\tilde{y}}{dx}$  durch  $\tilde{F}$  ersetzen, so sieht man, daß bereits die 2. Ableitung von  $F$  an den Stützstellen nicht mehr existiert, erst recht natürlich nicht die 4. Ableitung<sup>1)</sup>.

Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit bietet die Verwendung des Ampèreschen Restgliedes für den Interpolationsfehler

$$-\vartheta(x) = F(x) - \tilde{F}(x) = (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) F[x, x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \quad x_n < x < x_{n+1} \quad (13).$$

Die 4. dividierte Differenz am Schluß dieser Formel existiert. Dieser Vorschlag ist schon in meinem Aufsatz [2] von 1938 enthalten. Leider gibt es bislang keine bequeme Möglichkeit, diese 4. Differenz unmittelbar abzuschätzen. Daher möchte ich jetzt ein anderes Vorgehen empfehlen.

Dabei werde ausgenutzt, daß  $\tilde{y}$  und  $F = f(x, \tilde{y}(x))$  nur an den Stützstellen tabellarisch bekannt sind, daher in den Intervallen zwischen den Stützstellen leicht abgeändert werden

<sup>1)</sup> Diesen Sachverhalt hatte ich schon im Sommer-Semester 1939 in einer Vorlesung über „Praxis der Differentialgleichungen“, die ich an der Technischen Hochschule Dresden hielt, eingehend behandelt.

können, wenn man nur dafür sorgt, daß an den Stützstellen die Näherungswerte für  $y$  und  $f(x, y)$  erhalten bleiben. Wir führen also eine neue Funktion  $y^*$  ein, für die

$$y^*(x_i) = y(x_i), \quad \frac{dy^*}{dx}(x_i) = F(x_i), \quad i = n+1, n, n-1, n-2, \dots \quad (14)$$

gelten soll. Naheliegenderweise nahmen wir für diese neue Funktion  $y^*$  das Interpolationspolynom 7. Grades  $P_7(x)$ , das gerade durch die 8 Bedingungen (14) bestimmt ist. Zum Beispiel liefert die Lagrange-Hermite'sche Interpolationsformel:

$$P_7 = \sum_{i=n-2}^{n+1} L_i^2(x) \tilde{y}_i + \sum_{i=n-2}^{n+1} (x - x_i) L_i^2(x) [F_i - 2 L_i'(x_i) \tilde{y}_i] \dots \quad (15),$$

wobei die  $L_i$  die Lagrangeschen Elementarpolynome 3. Grades bezeichnen, also z.B.:

$$L_{n-1} = \frac{(x - x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n+1})}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n+1})}.$$

Statt dessen könnte man auch ein Newtonsches Interpolationspolynom mit zusammengerückten Stützstellen nehmen. Die so festgelegte Funktion  $y^* = P_7$  wird ausschließlich für das Intervall  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  in Gedanken als neue Näherung des Integrals  $y$  von (1) genommen, während in dem vorhergehenden Intervall  $x_{n-2} \leq x < x_n$  das Polynom  $y^* = P_7$  nur herangezogen wird, um eine bequeme Abschätzung des Interpolationsfehlers zu erhalten.

Weiter werde in dem Intervall  $x_{n-2} \leq x \leq x_{n+1}$  die jetzt grundsätzlich bekannte Funktion

$$F^*(x) = f(x, y^*(x)) = f(x, P_7(x)) \dots \quad (16)$$

eingeführt. Da  $\frac{dy^*}{dx} = P_7'$  ist, so ist also jetzt der Interpolationsfehler

$$-\vartheta = F^* - P_7'$$

für das exemplarische Intervall  $x_n < x < x_{n+1}$  abzuschätzen, nachdem analog zu (2)

$$\frac{dy^*}{dx} = F^* + \vartheta$$

für das Intervall  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  gesetzt ist. In bekannter Weise wird für diesen Interpolationsfehler der Ansatz gemacht:

$$-\vartheta = F^*(x) - P_7'(x) = (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1})\chi(x) \dots \quad (17).$$

Zur Abschätzung dieses Fehlers, der, wie gesagt, für das Intervall  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  zu bestimmen ist, wird nun das größere Intervall  $x_{n-2} \dots x_{n+1}$  benutzt, also  $F^*$  in diesem größeren Intervall gleich  $f(x, P_7(x))$  gesetzt. Die Hilfsfunktion:

$$\varphi(\lambda) = F^*(\lambda) - \{P_7'(\lambda) + (\lambda - x_{n-2})(\lambda - x_{n-1})(\lambda - x_n)(\lambda - x_{n+1})\chi(x)\} \dots \quad (18)$$

verschwindet für  $\lambda = x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  und für  $\lambda = x$ , also an mindestens 5 Stellen. Wegen der Stetigkeit der Ableitungen von  $F$  ist die viermalige Anwendung des Rolleschen Satzes möglich, wodurch folgt, daß  $\varphi^{(IV)}(\lambda)$  mindestens eine Nullstelle bei  $\lambda = \bar{x}$  hat, wo  $\bar{x}$  zwischen  $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  und  $x$  liegt ( $x$  selbst liegt zwischen  $x_n$  und  $x_{n+1}$ ). Da

$$\varphi^{(IV)}(\lambda) = F^{*(IV)}(\lambda) - P_7^{(IV)}(\lambda) - 4! \chi(x)$$

ist, so gilt für  $\lambda = \bar{x}$ :

$$0 = F^{*(IV)}(\bar{x}) - P_7^{(IV)}(\bar{x}) - 4! \chi(x).$$

Also ist

$$\chi(x) = \frac{F^{(IV)}(\bar{x}) - P_7^{(IV)}(\bar{x})}{4!} \dots \quad (19),$$

wobei  $x_{n-2} < \bar{x} < x_{n+1}$  ist. Führt man in der Faktoriellen  $(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n+1})$ , die in (17) auftritt,  $x = x_{n-1/2} + u\bar{h}$  ein, so wird diese Faktorielle gleich  $\bar{h}^4 \left(u^2 - \frac{9}{4}\right) \left(u^2 - \frac{1}{4}\right)$  und ihr Höchstbetrag, der bei  $u^2 = \frac{5}{4}$  angenommen wird, ist  $\bar{h}^4$ , wie man leicht feststellt. Als Schlußergebnis erhält man

$$|\vartheta| \leq \frac{\bar{h}^4}{24} |F^{*(IV)}(\bar{x}) - P_7^{(IV)}(\bar{x})| \dots \quad (20).$$

Das Glied  $P_7^{(IV)}(\bar{x})$  enthält im wesentlichen die Korrektur an einer entsprechenden Formel, welche man mit einer bedenkenlosen formalen Anwendung der Cauchyschen Resgldformel erhalten würde.  $P_7^{(IV)}(x)$  ist ein Polynom 2. Grades.

Wenn man  $\delta$  gemäß (20) abgeschätzt hat, so kann man die Formel (3) sinngemäß auf  $y^*$  anwenden, womit die Fehlerabschätzung geleistet ist.  $\delta$ , die absolute Fehlerschranke für die Ausgangswerte, die aus der Anlaufrechnung zu bestimmen sind, läßt sich ohne Komplikation durch einfache Anwendung der Cauchyschen Restgliedformel herleiten.  $k$  ist bei dem in dieser Betrachtung zugrunde gelegten Approximationsgrad gleich 3.

Es sei betont, daß auf Aussagen über den Fehler einer Näherung innerhalb der Intervalle zwischen den Stützstellen verzichtet wird; Feststellungen werden nur getroffen über den Fehler der tabulierten Näherungswerte  $y_i$  an den Stützstellen  $x_i$ .

Die praktische Ausgestaltung dieser hier skizzierten Fehlerabschätzung sowie ihr Vergleich mit den Ergebnissen von J. Weißinger [3] und E. Mohr [4] sei einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

### Literatur

- [1] R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 81—92.
- [2] W. Tollmien: Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 83—90.
- [3] J. Weißinger: Eine verschärfte Fehlerabschätzung zum Extrapolationsverfahren von Adams. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 356—363; — Eine Fehlerabschätzung für die Verfahren von Adams und Störmer. Dasselbst Bd. 32 (1952), S. 62—67.
- [4] E. Mohr: Über das Verfahren von Adams zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Math. Nachr. 5 (1951), S. 209—218.

## Verallgemeinerungen des Seidelschen Iterationsverfahrens<sup>\*)</sup>

Herrn R. v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet

Von Johannes Weissinger in Hamburg

### § 1. Einleitung

In [1] haben v. Mises und Pollaczek-Geiringer u. a. gezeigt, daß das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

oder in Matrizenschreibweise kurz

$$\mathfrak{A}x = r \quad (1.2)$$

nach dem Seidelschen Verfahren der Iteration in Einzelschritten, d. h. durch

$$x_i^{(p+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{(p+1)} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^{(p)} - r_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

mit beliebigen Anfangswerten  $x_k^{(0)}$  gelöst werden kann, wenn die Matrix  $\mathfrak{A}$  symmetrisch und definit ist. Allgemeiner ist dann auch eine „Iteration in Gruppen“ möglich, „bei der man zur Verbesserung der Unbekannten  $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots$  die Gleichungen mit den Nummern  $\alpha, \beta, \gamma$  verwendet und mit  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  in zyklischer Folge sämtliche Gleichungsnummern durchläuft“.

In §3 der vorliegenden Arbeit wird zunächst dieser Satz für eine etwas allgemeinere Klasse von Iterationsverfahren und Matrizen im Rahmen einer allgemeinen Fixpunkttheorie [3] neu hergeleitet. Der benötigte Fixpunktsatz sowie ein grundlegender Hilfssatz über Matrizen ist in §2 zu finden. Anschließend wird der Satz auf symmetrische, semidefinite Matrizen verallgemeinert. Aus dieser Verallgemeinerung kann man dann leicht die (determinantenfreie) Theorie beliebiger linearer Gleichungssysteme gewinnen.

Die Gedankengänge des §3 lassen sich leicht auf allgemeinere Probleme übertragen. In §4 wird die Übertragung für lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art durchgeführt. Als Ergebnis erhält man die vollständige (determinantenfreie) Auflösungstheorie dieser Integralgleichungen.

### § 2. Beweishilfsmittel

Gegeben sei eine additive Gruppe  $\Omega$  von Elementen  $\xi, \eta, \dots$ , für die eine Norm  $|\xi|$  mit folgenden Eigenschaften definiert sei:

- a) Es ist  $|\!-\!\xi| = |\xi| \geq 0$ , und  $|\xi| = 0$  ist äquivalent mit  $\xi = 0$ .
- b) Für beliebige  $\xi, \eta$  gilt  $|\xi + \eta| \leq |\xi| + |\eta|$ .

<sup>\*)</sup> In dieser Arbeit werden Teile eines auf der Freiburger Tagung der GaMM im März 1951 gehaltenen Vortrags ausführlicher dargestellt (vgl. [4]).

c) Die Gleichung  $\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} |\xi_\nu - \xi_\mu| = 0$  für eine Folge  $\xi_\nu$  ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Grenzpunktes  $\xi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu$  (d. h.  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\xi - \xi_\nu| = 0$ ).

Ferner sei  $T$  eine additive Abbildung:

$$T(\xi + \eta) = T\xi + T\eta$$

für beliebige  $\xi, \eta$ , die  $\Omega$  in sich abbildet. Existiert eine reelle Zahl  $|T|$  mit

$$|T\xi| \leq |T| |\xi| \quad \text{für alle } \xi,$$

so heißt  $|T|$  ein Betrag von  $T$ . Dann gilt der

Fixpunktsatz: *Besitzt die Abbildung  $T$  einen Betrag  $|T| < 1$ , so hat die Gleichung*

$$\xi = \eta + T\xi \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

*bei gegebenem  $\eta$  genau eine Lösung  $\xi$ , und diese ergibt sich als*

$$\xi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu$$

*aus der Folge*

$$\xi_{\nu+1} = \eta + T\xi_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (2.2)$$

*mit beliebig gewähltem  $\xi_0$ . Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$|\xi - \xi_\nu| \leq \frac{|T|}{1 - |T|} |\xi_\nu - \xi_{\nu-1}| \leq \frac{|T|^\nu}{1 - |T|} |\xi_1 - \xi_0| \dots \dots \dots (2.3).$$

Anmerkung: Gelegentlich hat man einen Normbegriff, der die Eigenschaften a), b), nicht aber c) besitzt, so daß  $\Omega$  nicht vollständig ist, eine konvergente Folge  $\xi_\nu$  (d. h.  $\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} |\xi_\nu - \xi_\mu| = 0$ ) also nicht unbedingt ein Grenzelement besitzen muß. Dann folgt aus  $|T| < 1$  zunächst nur die Konvergenz der Folge (2.2) sowie die Existenz höchstens einer Lösung von (2.1). Kann man aber für die Folge (2.2) die Existenz eines Grenzelements nachweisen, so bleibt der Satz in vollem Umfang richtig.

Hinsichtlich des sehr einfachen Beweises sei z. B. auf [3] verwiesen, wo der Satz in allgemeinerer Form formuliert und bewiesen ist.

Grundlage der folgenden Betrachtungen ist eine Beziehung zwischen quadratischen Matrizen, die mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Unter  $\mathfrak{A}'$  werde die Transponierte von  $\mathfrak{A}$  verstanden.  $\mathfrak{E}$  bezeichnet die Einheitsmatrix.

Hilfssatz: *Ist  $\mathfrak{S}$  eine symmetrische,  $\mathfrak{B}_1$  eine beliebige Matrix derart, daß  $(\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1}$  existiert, und setzt man mit beliebigem  $\mathfrak{F}$ :*

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{C} = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{B}_2 \dots \dots \dots (2.4)$$

*so gilt*

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{S} + \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}')(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) \dots \dots \dots (2.5).$$

Beweis:

Es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_2(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}).$$

Mit der Abkürzung

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{S} + \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) \dots \dots \dots (2.6)$$

wird daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C} &= -(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')\mathfrak{B}_2(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}\mathfrak{C} = -\mathfrak{P} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{S} - \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}\mathfrak{C} \\ &= -\mathfrak{P} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}\mathfrak{C} = -\mathfrak{P} + (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_2')(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C} = -\mathfrak{P} + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \mathfrak{A},$$

woraus wegen

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{A} = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}' \dots \dots \dots (2.7)$$

die Behauptung folgt.

### § 3. Lineare Gleichungssysteme

Satz 1:  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{S} + \mathfrak{F}$  seien positiv definite, symmetrische Matrizen, es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{F} \dots \dots \dots (3.1)$$

und es existiere  $(\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1}$ . Dann konvergiert die mittels

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{B}_2, \quad \mathbf{r}^* = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathbf{r} \dots \dots \dots (3.2)$$

gebildete Vektorfolge

$$\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{r}^*, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

bei beliebigem  $\mathfrak{x}_0$  gegen die (eindeutig bestimmte) Lösung von

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \quad (3.4)$$

Beweis: Offenbar ist jede Lösung von  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  auch Lösung von

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{x} + \mathfrak{r}^* \quad (3.5)$$

und umgekehrt. Man kann also in der Behauptung auch (3.5) an die Stelle von (3.4) setzen.

Wir zeigen, daß der Satz ein Spezialfall des Fixpunktsatzes ist. Als additive Gruppe  $\mathfrak{Q}$  wählen wir die Menge aller  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\mathfrak{x}$  mit der gewöhnlichen Vektoraddition. Als Norm nehmen wir den Betrag, der sich aus der zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen Metrik ergibt und den wir zum Unterschied von dem gewöhnlichen Vektorbetrag  $|\mathfrak{x}|$  mit  $\langle \mathfrak{x} \rangle$  bezeichnen wollen:

$$\langle \mathfrak{x} \rangle = \sqrt{\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k} \quad (3.6)$$

Bekanntlich ist hierdurch wirklich eine Norm mit den Eigenschaften  $a, b, c$  des §2 definiert.

Als Abbildung  $\xi^* = T\xi$  nehmen wir die lineare Transformation  $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ , die offenbar additiv im Sinne des §2 ist. Der Satz 1 ist also bewiesen, wenn die Existenz einer Zahl  $|\mathfrak{C}| < 1$  nachgewiesen ist, so daß für alle  $\mathfrak{x}$  gilt

$$\langle \mathfrak{C}\mathfrak{x} \rangle = \sqrt{\mathfrak{x}'\mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{x}} \leq |\mathfrak{C}| \langle \mathfrak{x} \rangle \quad (3.7)$$

Aus den Symmetrievoraussetzungen und (2.7) folgt die Symmetrie sowohl von  $\mathfrak{S}$  wie von  $\mathfrak{F}$ . Daher ist nach dem Hilfssatz:

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{P} \quad (3.8)$$

wobei  $\mathfrak{P}$  nach (2.6) wegen der positiven Definitheit von  $\mathfrak{S} + \mathfrak{F}$  positiv definit ist. Mithin gibt es eine positive Zahl  $p$ , so daß

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{P}\mathfrak{x} > p\langle \mathfrak{x} \rangle^2, \quad 0 < p < 1 \quad (3.9)$$

gilt. Folglich ist (3.7) mit  $|\mathfrak{C}| = \sqrt{1-p} < 1$  erfüllbar und der Satz bewiesen.

Bemerkungen:

1. Offenbar bleibt Satz 1 richtig, wenn man den Begriff „positiv definit“ durch „negativ definit“ ersetzt.

2. Zerlegt man die Matrix  $\mathfrak{A}$  nach folgendem Schema:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} & & -\mathfrak{B}_2 \\ & \mathfrak{S} & \\ -\mathfrak{B}_1 & & \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S} & & -\mathfrak{B}_2 \\ & \mathfrak{S} & \\ -\mathfrak{B}_1 & & \mathfrak{S} \dots \end{pmatrix}$$

d.h. wählt man für  $\mathfrak{S}$  die Hauptdiagonalmatrix von  $\mathfrak{A}$  bzw. eine aus lauter „Hauptminoren“ bestehende Matrix, während  $-\mathfrak{B}_1$  ( $-\mathfrak{B}_2$ ) aus den übrigbleibenden Elementen unter-(ober-)halb der Hauptdiagonale besteht, so wird die Vektorfolge  $\mathfrak{x}_{\nu}$  des Satz 1 identisch mit der nach (1.3) gebildeten Folge  $\mathfrak{x}_{\nu}$  des Einzelschrittverfahrens bzw. mit der entsprechenden Folge des Gruppenverfahrens. Satz 1 umfaßt also die in §1 genannten Ergebnisse aus [1].

3. Für eine beliebige Matrix  $\mathfrak{A}$  wollen wir in dieser Bemerkung unter  $\mathfrak{A}^*$  stets die symmetrische Matrix

$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}')$$

verstehen. Die zu  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^*$  gehörigen quadratischen Formen sind dann gleich, so daß Definitheit von  $\mathfrak{A}$  mit Definitheit von  $\mathfrak{A}^*$  äquivalent ist.

Geht man in der Relation (2.5) des Hilfssatzes links und rechts zu den transponierten Matrizen über und mittelt die entstandene Gleichung mit (2.5), so entsteht

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}^*\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^* - \mathfrak{P}^* - \mathfrak{Q}^*,$$

wobei

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{S} + \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = (\mathfrak{F}' - \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}),$$

also

$$\mathfrak{P}^* = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{S} + \mathfrak{F}^*)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C})$$

$$\mathfrak{Q}^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}' - \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})\mathfrak{C} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}'(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$$

ist. Fordert man demnach in Satz 1 an Stelle der Symmetrie von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C} + \mathfrak{F}$  (und damit von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{F}$ ) lediglich die Symmetrie von  $\mathfrak{C}$ , so bleibt, wie der Beweisgang sofort erkennen läßt, die Behauptung, insbesondere z. B. auch die Konvergenz des Einzelschrittverfahrens, bestehen, falls  $\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^*$  positiv definit ist. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Voraussetzung für nicht allzu unsymmetrische, positiv definite Matrizen  $\mathfrak{A}$ , für die also die Elemente von  $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$  absolut genommen genügend klein sind, sicherlich erfüllbar. Da wegen

$$\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^* = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}') \mathfrak{R} (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}') \\ \mathfrak{R} = \mathfrak{C} + \mathfrak{F}^* + \frac{1}{2} (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1') \mathfrak{A}^{-1} (\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') \mathfrak{A}^{-1} (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)$$

$\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^*$  gleichzeitig mit  $\mathfrak{R}$  positiv definit ist, kann man diese Eigenschaft auch von  $\mathfrak{R}$  verlangen. Hinreichend dafür ist  $|\mathfrak{R} - \mathfrak{C}| < 1$ , wobei  $|\mathfrak{A}|$  einen der üblichen Matrizenbeträge (vgl. [3]) bedeutet. Ein ähnliches Kriterium ist in [2] hergeleitet worden.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir jetzt den Fall untersuchen, daß  $\mathfrak{A}$  symmetrisch und semidefinit ist, daß also nur  $\mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} \geq 0$  statt  $\mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} > 0$  für alle  $\mathfrak{x}$  gilt. Dann sind die Diagonalelemente  $a_{ii}$  von  $\mathfrak{A}$  nur noch  $\geq 0$  statt  $> 0$ , so daß das Einzelschrittverfahren in der Form (1.3) u. U. gar nicht durchführbar ist. Dagegen existieren stets Zerlegungen von  $\mathfrak{A}$ , die alle Voraussetzungen des Satz 1 erfüllen. Bezeichnet nämlich  $\mathfrak{D}$  die Diagonalmatrix von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}_l$  bzw.  $\mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}_l'$  die links bzw. rechts der Diagonale stehende Matrix:  $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{B}_l + \mathfrak{B}_r$ , so braucht man nur

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{B}_1 = -\mathfrak{B}_l, \quad \mathfrak{B}_2 = -\mathfrak{B}_r + \mathfrak{F}$$

mit irgendeiner symmetrischen, positiv definiten Matrix  $\mathfrak{F}$  zu setzen. Wählt man z. B.  $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}$ , so erhält man statt (1.3) die Iterationsgleichungen:

$$x_i^{(v+1)} = -\frac{1}{a_{ii} + 1} \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{(v+1)} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^{(v)} - x_i - r_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10).$$

Die Vektorfolge  $\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{C} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{r}^*$  ist dann für beliebiges  $\mathfrak{x}_0$  definiert, aber sie braucht nicht zu konvergieren. Denn im Konvergenzfalle muß sie offenbar gegen eine Lösung von  $\mathfrak{x} = \mathfrak{C} \mathfrak{x} + \mathfrak{r}^*$  d. h. von  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  konvergieren, und bei singulärem  $\mathfrak{A}$  existiert eine solche Lösung gar nicht für alle  $\mathfrak{r}$ . Wir werden aber sehen, daß das Verfahren immer konvergiert, wenn  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  lösbar ist.

Wir betrachten eine Zerlegung der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix  $\mathfrak{A}$  wie in Satz 1 und führen folgende Bezeichnungen ein:

$R_0$  ist der Raum der Nulllösungen von  $\mathfrak{A}$ , besteht also aus allen Vektoren  $\mathfrak{n}$ , die der Gleichung  $\mathfrak{A} \mathfrak{n} = 0$  bzw. damit äquivalent  $\mathfrak{n} = \mathfrak{C} \mathfrak{n}$  genügen.  $R_s$  ist der zu  $R_0$  orthogonale Raum, und  $R_t = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} R_s$  besteht aus allen Vektoren  $\mathfrak{t} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{s}$  mit  $\mathfrak{s} \in R_s$ .

Hilfssatz 1: Der Raum  $R_t$  wird durch  $\mathfrak{C}$  in sich abgebildet:  $\mathfrak{C} R_t \subset R_t$ . Durch

$$\langle \mathfrak{t} \rangle = \sqrt{\mathfrak{t}' \mathfrak{A} \mathfrak{t}} \quad (3.11)$$

wird eine Norm in  $R_t$  definiert.

Beweis: Wegen

$$\mathfrak{C} R_t = \mathfrak{C} (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} R_s = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{B}_2 (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} R_s$$

ist die Behauptung  $\mathfrak{C} R_t \subset R_t$  gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{B}_2 (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} R_s \subset R_s$$

und dies wieder mit

$$\mathfrak{s}' (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1')^{-1} \mathfrak{B}_2' \mathfrak{n} = 0$$

für alle  $\mathfrak{n} \in R_0$ ,  $\mathfrak{s} \in R_s$ . Das ist aber wegen  $\mathfrak{A}' \mathfrak{n} = 0$ , also  $\mathfrak{n} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1')^{-1} \mathfrak{B}_2' \mathfrak{n}$  richtig.

Offenbar ist durch (3.11) eine Norm in  $R_t$  definiert, wenn  $\mathfrak{A}$  in  $R_t$  nicht nur semidefinit, sondern sogar definit ist, wenn also  $\mathfrak{t}' \mathfrak{A} \mathfrak{t}$  in  $R_t$  nur für  $\mathfrak{t} = 0$  verschwindet. Da  $\mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} = 0$  äquivalent mit  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = 0$  ist, haben wir also zu zeigen, daß  $R_t$  und  $R_0$  nur den Nullvektor gemein haben:  $R_t \cap R_0 = 0$ . Ist nun

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{s} = \mathfrak{n}, \quad (\mathfrak{s} \in R_s, \quad \mathfrak{n} \in R_0)$$

ein solcher gemeinsamer Vektor, so gilt

$$0 = \mathfrak{n}' \mathfrak{s} = \mathfrak{n}' (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{n} = \mathfrak{n}' \frac{\mathfrak{C}}{2} \mathfrak{n} + \mathfrak{n}' \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_1'}{2} \mathfrak{n} \\ = \mathfrak{n}' \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{F}}{2} \mathfrak{n} + \mathfrak{n}' \frac{\mathfrak{A}}{2} \mathfrak{n} = \mathfrak{n}' \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{F}}{2} \mathfrak{n}.$$

Da  $\mathfrak{C} + \mathfrak{F}$  positiv definit ist, muß also  $\mathfrak{n} = 0$  sein.

Nunmehr ergibt sich leicht der angekündigte

**Satz 2:** Zerlegt man die symmetrische, positiv semidefinite Matrix  $\mathfrak{A}$  wie in Satz 1, was stets möglich ist, so konvergiert die Folge

$$\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{r}^*, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

bei beliebigem  $\mathfrak{x}_0 \in R_t$  gegen eine Lösung von  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$ , wenn diese Gleichung überhaupt Lösungen besitzt.

**Beweis:** Da  $\mathfrak{r} \in R_s$  notwendig für die Lösbarkeit von  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  ist, liegen  $\mathfrak{r}^* = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1}\mathfrak{r}$  und wegen  $\mathfrak{C}R_t \subset R_t$  alle  $\mathfrak{x}_{\nu}$  in  $R_t$ . Da  $\mathfrak{A}$  und damit auch  $\mathfrak{C} - \mathfrak{C}$  in  $R_t$  nur den Nullvektor annulliert und  $\mathfrak{C} + \mathfrak{F}$  nach Voraussetzung sogar im ganzen Vektorraum positiv definit ist, sind  $\mathfrak{P} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C})(\mathfrak{C} + \mathfrak{F})(\mathfrak{C} - \mathfrak{C})$  und  $\mathfrak{A}$  in  $R_t$  positiv definit. Der Beweis von Satz 1 läßt sich also wörtlich übertragen, wenn man überall den ganzen Vektorraum durch  $R_t$  ersetzt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Einschränkung  $\mathfrak{x}_0 \in R_t$  unnötig ist, und das Verhalten der Folge  $\mathfrak{x}_{\nu}$  für ganz beliebiges  $\mathfrak{x}_0$  und  $\mathfrak{r}$  untersuchen.

**Hilfssatz 2:** Die Folge

$$\eta_{\nu} = \mathfrak{C}^{\nu}\eta_0 \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad \eta_0 \text{ beliebig,}$$

ist stets konvergent.  $\eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_{\nu}$  liegt in  $R_0$  und durchläuft ganz  $R_0$ , wenn  $\eta_0$  den ganzen Vektorraum

durchläuft. Die drei Aussagen

- a)  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{\nu}\eta_0$  konvergiert,  
b)  $\eta = 0$  und c)  $\eta_0 \in R_t$

sind äquivalent.

**Beweis:** Da  $\mathfrak{z} = \mathfrak{A}\eta_0$  für beliebiges  $\eta_0$  in  $R_s$  liegt, so gilt

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{B}_1)^{-1}\mathfrak{z} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C})\eta_0 \in R_t \dots \dots \dots (3.12),$$

so daß also nach Satz 2 mit  $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{t}$ ,  $\mathfrak{x}_0 = 0$  die Folge

$$\mathfrak{x}_{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{C}^k \mathfrak{t} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}^{\nu})\eta_0 = \eta_0 - \eta_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

konvergiert. Daher existiert auch  $\eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_{\nu}$  und genügt wegen  $\eta_{\nu+1} = \mathfrak{C}\eta_{\nu}$  der Gleichung  $\eta = \mathfrak{C}\eta$ , d.h.  $\mathfrak{A}\eta = 0$ . Ist umgekehrt  $\mathfrak{n} \in R_0$  (also  $\mathfrak{n} = \mathfrak{C}\mathfrak{n}$ ) vorgegeben, so wird  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_{\nu} = \mathfrak{n}$ , wenn  $\eta_0 = \mathfrak{n}$  gewählt wird.

Wegen  $\mathfrak{C}R_t \subset R_t$  liegen alle  $\mathfrak{x}_{\nu}$  und damit auch  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_{\nu} = \eta_0 - \eta$  in  $R_t$ . Die Aussage  $\eta_0 \in R_t$  ist daher gleichbedeutend mit  $\eta_0 \in R_t$  und folglich — wegen  $\eta \in R_0$  und  $R_0 \cap R_t = 0$  — mit  $\eta = 0$ . Ferner folgt aus  $\eta_0 \in R_t$  wie eben nach Satz 1 die Konvergenz von  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{\nu}\eta_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_{\nu}$ , und umgekehrt hat die Konvergenz dieser Reihe  $\eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_{\nu} = 0$  zur Folge, womit der Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Wir betrachten nun die Folge

$$\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{r}^*, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

mit beliebigen Vektoren  $\mathfrak{x}_0$  und  $\mathfrak{r}^* = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1}\mathfrak{r}$ . Durch Differenzenbildung entsteht

$$\eta_{\nu} = \mathfrak{C}\eta_{\nu-1} = \mathfrak{C}^{\nu}\eta_0, \quad \eta_{\nu} = \mathfrak{x}_{\nu+1} - \mathfrak{x}_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

mit

$$\eta_0 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{r}^* - (\mathfrak{C} - \mathfrak{C})\mathfrak{x}_0.$$

Da nach (3.12) der Vektor  $\mathfrak{t} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C})\mathfrak{x}_0$  für beliebiges  $\mathfrak{x}_0$  in  $R_t$  liegt, so ist  $\mathfrak{r}^* \in R_t$  (d.h.  $\mathfrak{r} \in R_s$ ) äquivalent mit  $\eta_0 \in R_t$ . Nach Hilfssatz 2 ist also  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mathfrak{x}_{\nu} - \mathfrak{x}_0)$  und damit die Folge  $\mathfrak{x}_{\nu}$  dann und nur dann konvergent, wenn  $\mathfrak{r} \in R_s$ . Liegt  $\mathfrak{r}$  nicht in  $R_s$ , so ist

$$\eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mathfrak{x}_{\nu+1} - \mathfrak{x}_{\nu}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}^{\nu}\eta_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}^{\nu}\mathfrak{r}^*$$

eine nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ ; läßt man  $\mathfrak{r}$  eine Basis des ganzen Vektorraums durchlaufen, so liefert dieser Grenzprozeß ein Erzeugendensystem von  $R_0$ . Man

kann also z.B. aus (3.10) durch Differenzbildung alle Lösungen der homogenen Gleichung erhalten.

Wir fassen die wesentlichen, bisher gewonnenen Ergebnisse zusammen in dem

**Hauptsatz:** Ist  $\mathfrak{A}$  eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, so gibt es stets Zerlegungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{F}$$

derart, daß  $(\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1}$  existiert.  $\mathfrak{S}$  symmetrisch und  $\mathfrak{S} + \mathfrak{F}$  positiv definit ist. Bildet man aus beliebigen Vektoren  $\mathfrak{x}_0$  und  $\mathfrak{r}$  mittels

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{r}^* = (\mathfrak{S} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{r}$$

die Folge

$$\mathfrak{x}_{v+1} = \mathfrak{G} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{r}^*, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

so konvergiert die Folge  $\mathfrak{h}_v = \mathfrak{x}_{v+1} - \mathfrak{x}_v$  stets gegen eine Nulllösung von  $\mathfrak{A}$ , und zwar dann und nur dann gegen eine nichttriviale Nulllösung, wenn  $\mathfrak{r}$  nicht orthogonal zu allen Nulllösungen von  $\mathfrak{A}$  ist. Durch geeignete Wahl von  $\mathfrak{r}$  kann man so jede Nulllösung erhalten. Existiert sogar  $\mathfrak{z} = \lim_{v \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_v$ , so genügt  $\mathfrak{z}$  der Gleichung  $\mathfrak{A} \mathfrak{z} = \mathfrak{r}$  und umgekehrt gilt trivialerweise für jede Lösung  $\mathfrak{z}$  dieser Gleichung:  $\mathfrak{z} = \lim_{v \rightarrow \infty} \mathfrak{x}_v$ , wenn  $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}$  gewählt wird. Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge  $\mathfrak{x}_v$  (und damit für die Lösbarkeit von  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$ ) ist die Orthogonalität von  $\mathfrak{r}$  zu allen Nulllösungen von  $\mathfrak{A}$ .

Wir betrachten jetzt das Gleichungssystem

$$\mathfrak{M} \mathfrak{x} = \mathfrak{m}$$

mit einer beliebigen rechteckigen Matrix  $\mathfrak{M}$ . Jede Lösung dieser Gleichung ist auch Lösung der Gleichung  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$ , wo

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{M}' \mathfrak{m}$$

gesetzt ist.  $\mathfrak{A}$  ist symmetrisch und positiv semidefinit und besitzt dieselben Nulllösungen wie  $\mathfrak{M}$ :  $R_0(\mathfrak{A}) = R_0(\mathfrak{M})$ . Daher gilt auch für die entsprechenden Orthogonalräume:  $R_s(\mathfrak{A}) = R_s(\mathfrak{M})$ .

Für die Lösbarkeit von  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  ist  $\mathfrak{r} \in R_s(\mathfrak{A})$  notwendig und hinreichend; das ist für  $\mathfrak{r} = \mathfrak{M}' \mathfrak{m}$  stets der Fall, da  $\mathfrak{M}' \mathfrak{m} \in R_s(\mathfrak{M})$  für beliebiges  $\mathfrak{m}$  gilt. Die Gleichung  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  ist also nach dem Hauptsatz stets lösbar. Für die Lösung  $\mathfrak{u}$  kann man aber nicht  $\mathfrak{M} \mathfrak{u} = \mathfrak{m}$  folgern, sondern nur  $\mathfrak{M} \mathfrak{u} = \mathfrak{m} + \mathfrak{v}$  mit  $\mathfrak{v} \in R_0(\mathfrak{M}')$ . Da  $\mathfrak{M} \mathfrak{u} \in R_s(\mathfrak{M}')$  für jeden Vektor  $\mathfrak{u}$  gilt, so ist  $\mathfrak{m} \in R_s(\mathfrak{M}')$  äquivalent mit  $\mathfrak{v} = 0$ . Ist also die für die Lösbarkeit von  $\mathfrak{M} \mathfrak{x} = \mathfrak{m}$  notwendige Bedingung  $\mathfrak{m} \in R_s(\mathfrak{M}')$  erfüllt, so sind die nach dem Hauptsatz sicher vorhandenen Lösungen von  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  auch Lösungen von  $\mathfrak{M} \mathfrak{x} = \mathfrak{m}$ .

#### § 4. Lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art

Die Übertragung der vorstehenden Überlegungen auf die Integralgleichung:

$$x(\sigma) - \int_0^1 K(\sigma, \tau) x(\tau) d\tau = r(\sigma) \quad \dots \quad (4.1),$$

in der wir der Einfachheit halber die gegebenen Funktionen  $K(\sigma, \tau)$  und  $r(\sigma)$  als stetig voraussetzen wollen, macht keine Schwierigkeiten, da die meisten Schlüsse allgemein für lineare Operatoren gültig sind.

Um die Analogien deutlicher hervortreten zu lassen, betrachten wir die Funktionen  $x(\sigma)$ ,  $y(\sigma)$ ,  $r(\sigma)$ , ... als Elemente  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$ ,  $\mathfrak{r}$ , ... im Raume der stetigen Funktionen, definieren

$$\mathfrak{x}' \mathfrak{y} = \mathfrak{y}' \mathfrak{x} = \int_0^1 x(\sigma) y(\sigma) d\sigma$$

und schreiben

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{K} \mathfrak{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{K}' \mathfrak{x}$$

an Stelle von

$$y(\sigma) = \int_0^1 K(\sigma, \tau) x(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad y(\sigma) = \int_0^1 K(\tau, \sigma) x(\tau) d\tau.$$

Damit gilt dann z. B.

$$\mathfrak{y}' \mathfrak{K} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \mathfrak{K}' \mathfrak{y} = \int_0^1 \int_0^1 K(\sigma, \tau) x(\tau) y(\sigma) d\sigma d\tau.$$

Wird der Einheitsoperator mit  $\mathfrak{E}$  bezeichnet, so kann man also statt (4.1) schreiben

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{E} - \mathfrak{K} \quad \dots \quad (4.2).$$

In § 3 haben wir ziemlich allgemeine Zerlegungen der Matrix  $\mathfrak{A}$  betrachtet, um auch für semidefinite Matrizen das Verfahren stets durchführen zu können. Jetzt dagegen wollen wir nur die dem eigentlichen Einzelschrittverfahren nach (1.3) entsprechende Zerlegung betrachten, die bei Integralgleichungen immer zum Ziel führt. An diesem Beispiel wird dann auch das Verfahren für allgemeinere Zerlegungen klar.

Wir definieren die Kerne

$$B_1(\sigma, \tau) = \begin{cases} K(\sigma, \tau), & \tau \leq \sigma \\ 0, & \tau > \sigma \end{cases}, \quad B_2(\sigma, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \sigma \\ K(\sigma, \tau), & \tau > \sigma \end{cases} \quad (4.3)$$

mit den zugehörigen Operatoren  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_2$ , so daß also überall  $K = B_1 + B_2$ , d. h.  $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ , gilt. Der Operator  $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_1$ , der einer Volterraschen Integralgleichung entspricht, besitzt ein Inverses:

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} = \mathfrak{C} + \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{B}_1^{\nu}.$$

Dem Operator  $\mathfrak{L}$  entspricht als Kern die Neumannsche Reihe:

$$L(\sigma, \tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_1^{(\nu)}(\sigma, \tau) \quad (4.4),$$

in der  $B_1^{(\nu)}$  die  $\nu$ -te Iterierte von  $B_1$  bedeutet. Daher ist (4.2) äquivalent mit

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) \mathfrak{x} = \mathfrak{r}^*, \quad \text{wobei } \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{r}^* = (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}_1)^{-1} \mathfrak{r} \quad (4.5),$$

d. h. jede Lösung von (4.1) ist auch Lösung von

$$x(\sigma) - \int_0^1 C(\sigma, \tau) x(\tau) d\tau = r^*(\sigma) \quad (4.6)$$

mit

$$C(\sigma, \tau) = B_2(\sigma, \tau) + \int_0^1 L(\sigma, \varrho) B_2(\varrho, \tau) d\varrho \quad (4.7),$$

$$r^*(\sigma) = r(\sigma) + \int_0^1 L(\sigma, \tau) r(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

und umgekehrt. Wenn (4.6) durch eine Neumannsche Reihe gelöst werden kann, so ist damit (4.1) durch zweimalige Bildung einer Neumannschen Reihe gelöst.

Wir setzen den Kern  $K(\sigma, \tau)$  für das folgende als symmetrisch voraus. Der Beweis des Hilfssatzes aus § 2 überträgt sich wörtlich auf Integraloperatoren, wobei wir bei unserer speziellen Zerlegung hier und im folgenden noch  $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{F} = 0$  setzen dürfen. Insbesondere ist dann die in § 3 stets auftretende Forderung, daß  $\mathfrak{S} + \mathfrak{F}$  symmetrisch und positiv definit sein soll, sicher erfüllt. Die Forderung, daß  $\mathfrak{A}$  positiv definit sei, besagt für den Kern  $K(\sigma, \tau)$ , daß

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\sigma, \tau) x(\sigma) x(\tau) d\sigma d\tau < \int_0^1 x^2(\sigma) d\sigma$$

für alle stetigen Funktionen  $x(\sigma)$  gilt; bei Semidefinitheit ist das  $=$ -Zeichen zugelassen.

Ist  $\mathfrak{A}$  positiv definit, so existieren bekanntlich zwei positive Konstanten  $c_1, c_2$  so daß

$$c_1 \mathfrak{x}' \mathfrak{x} < \mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} < c_2 \mathfrak{x}' \mathfrak{x} \quad (4.9)$$

für alle stetigen Funktionen  $x(\sigma)$  gilt. Daraus folgt sofort, daß die Beziehung  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{x}'_{\nu} \mathfrak{A} \mathfrak{x}_{\nu} = 0$

für irgendeine Folge  $\mathfrak{x}_{\nu}$  gleichbedeutend ist mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{x}'_{\nu} \mathfrak{x}_{\nu} = 0$ , d. h. mit Konvergenz im Mittel

(gegen 0) für die Folge  $x_{\nu}(\sigma)$ . Da aus Konvergenz im Mittel im allgemeinen nicht gleichmäßige Konvergenz folgt, ist der Raum  $\Omega$  der stetigen Funktionen mit der Normdefinition:

$$\langle \mathfrak{x} \rangle = \sqrt{\mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x}} \quad (4.10)$$

nicht vollständig, wohl aber offensichtlich mit der Definition

$$|\mathfrak{x}| = \max_{0 \leq \sigma \leq 1} |x(\sigma)| \quad (4.11).$$

Die Übertragung des Beweises von Satz 1 aus § 3 liefert also zunächst nur die Konvergenz der Folge

$$\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{C} \mathfrak{x}_{\nu} + \mathfrak{r}^*, \quad \mathfrak{x}_0 \text{ beliebig}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

im Sinne der Normdefinition (4.10). Nun gilt aber für eine quellenmäßig dargestellte Funktion

$$\mathfrak{y}(\sigma) = \int_0^1 \mathfrak{x}(\sigma, \tau) x(\tau) d\tau, \quad \text{d. h. } \mathfrak{y} = \mathfrak{C} \mathfrak{x}$$

nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|y(\sigma)| \leq c \sqrt{\int_0^1 x^2(\tau) d\tau}, \quad c = \sqrt{\max_{0 \leq \sigma \leq 1} \int_0^1 C^2(\sigma, \tau) d\tau},$$

d. h.

$$|\eta| \leq c \sqrt{x'x},$$

also nach (4.9)

$$|\eta| \leq c_3 \langle x \rangle, \quad c_3 = \frac{c}{\sqrt{c_1}}.$$

Für die Differenz  $x_{\nu+1} - x_{\mu+1} = \mathfrak{G}(x_\nu - x_\mu)$  der Folge (4.12) gilt daher

$$|x_{\nu+1} - x_{\mu+1}| \leq c_3 \langle x_\nu - x_\mu \rangle,$$

so daß also für die Iterationsfolge (4.12) aus Konvergenz im Sinne von (4.10) auch Konvergenz nach (4.11), d. h. gleichmäßige Konvergenz und damit die Existenz einer stetigen Grenzfunktion folgt. Der Fixpunktsatz ist also auch mit der Normdefinition (4.10) gültig und der Beweis des Satz 1 vollständig übertragbar.

Um die weiteren Ausführungen des §3 zu übertragen, benötigt man einige Eigenschaften des Raums  $\Omega$  der stetigen Funktionen, die im Fall des  $n$ -dimensionalen Vektorraums selbstverständlich waren.

$\Omega_0$  sei ein linearer Teilraum von  $\Omega$ , der jedes Element aus  $\Omega$  enthält, das orthogonal zu allen Elementen des zu  $\Omega_0$  orthogonalen Raumes  $\Omega_s$  ist. Beispiele für einen solchen Raum  $\Omega_0$  sind der Raum  $R_0$  der Nulllösungen von  $\mathfrak{A}$ , der zu  $R_0$  orthogonale Raum  $R_s$  und der Raum  $R_t = (\mathfrak{G} - \mathfrak{B}_1)^{-1} R_s$ .

Ist  $x_\nu$  eine Folge aus  $\Omega_0$ , die im Mittel gegen ein Element  $x$  aus  $\Omega$  konvergiert:  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (x_\nu - x)'(x_\nu - x) = 0$ , so muß  $x$  in  $\Omega_0$  liegen. Denn für beliebiges  $\eta \in \Omega$  gilt dann  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta' x_\nu = \eta' x$ , also  $\eta' x = 0$  für alle  $\eta \in \Omega_0$ .

Wir setzen jetzt  $\mathfrak{A}$  nur als positiv *semidefinit* voraus und betrachten eine beliebige Folge  $x_\nu \in \Omega_0$  mit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \mathfrak{A} x_\nu = 0, \quad x'_\nu x_\nu = 1 \dots \dots \dots (4.13)$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist dann auch  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \mathfrak{A} z_\nu = 0$  für jede Folge  $z_\nu$  mit beschränktem  $z'_\nu \mathfrak{A} z_\nu = \langle z_\nu \rangle^2$ . Wegen  $x'_\nu x_\nu = 1$  ist für die Folge  $z_\nu = \mathfrak{R}^2 x_\nu$  sogar  $|z_\nu|$  beschränkt, so daß also wegen der Vertauschbarkeit von  $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} - \mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{R}$  sicher gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta'_\nu \mathfrak{A} \eta_\nu = 0, \quad \eta_\nu = \mathfrak{R} x_\nu \dots \dots \dots (4.14).$$

Da die  $\eta_\nu$  beschränkt und gleichgradig stetig sind, kann man aus ihnen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen;  $\nu$  möge fortan nur die Indizes dieser Teilfolge durchlaufen. Dann ist also

$$\eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_\nu$$

im Sinne des zu (4.11) gehörigen Konvergenzbegriffes, d. h. im Sinne gleichmäßiger Konvergenz für die zugeordneten Funktionen. Aus (4.14) folgt nun  $\eta' \mathfrak{A} \eta = 0$  und daraus

$$\mathfrak{A} \eta = 0, \quad \text{d. h.} \quad \eta = \mathfrak{R} \eta \dots \dots \dots (4.15).$$

Ferner ist nach (4.13), (4.15):

$$1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \mathfrak{R} x_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \eta_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x'_\nu \mathfrak{R} \eta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta'_\nu \eta = \eta' \eta$$

und daher

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (x_\nu - \eta)'(x_\nu - \eta) = 0,$$

d. h. die  $x_\nu$  konvergieren im Mittel gegen  $\eta$ , so daß  $\eta$  in  $\Omega_0$  liegen muß.

Ist also  $\Omega_0$  ein Raum, der mit dem Raum  $R_0$  der Nulllösungen von  $\mathfrak{A}$  nur die 0 gemein hat, so hat sich ein Widerspruch ergeben: Eine Folge  $x_\nu \in \Omega_0$  mit der Eigenschaft (4.13) kann gar nicht existieren, d. h. es existieren Konstanten  $c_1 > 0$  und (trivialerweise)  $c_2 > 0$  mit

$$c_1 x'x < x' \mathfrak{A} x < c_2 x'x \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega_0.$$

Auf  $\Omega_0$  ist daher Konvergenz nach (4.10) äquivalent mit Konvergenz im Mittel, für Iterationsfolgen also sogar mit gleichmäßiger Konvergenz.



Die vorliegende Arbeit ist eine Untersuchung über die Eigenschaften von...

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$$

Die Funktion  $f(x)$  ist für  $x > 0$  definiert und hat die Eigenschaft...

Die Ableitung der Funktion  $f(x)$  ist gegeben durch...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...

Die Funktion  $f(x)$  ist eine Potenzreihe, die für  $x > 0$  konvergiert...